目　录

数书九章序

周教六艺，数实成之，学士大夫，所从来尚矣．其用本太虚生一，而周流无穷．大则可以通神明，顺性命，小则可以经世务，类万物，讵容以浅近窥哉．若昔推策以迎日，定律而知气，髀矩浚川，土圭度晷，天地之大，囿焉而不能外，况其间总总者乎．爰自河图洛书，闿发秘奥，八卦九畴，错综精微，极而至于大衍皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣．圣人神之，言而遗其粗，常人昧之，由而莫之觉，要其归，则数与道非二本也．汉去古未远，有张苍、许商、乘马延年、耿寿昌、郑[元]、张衡、刘洪之伦，或明天道，而法传于后，或计功策，而效验于时，后世学者自高，鄙不之讲，此学殆绝，惟治历畴人，能为乘除，而弗通于开方衍变，若官府会事，则府史一二系之，算家位置，素所不识，上之人亦委而听焉．持算者惟若人，则鄙之也宜矣．呜呼！乐有制氏，仅记铿锵，而谓与天地同和者止于是可乎．今数术之书，尚三十余家，天象历度，谓之缀术，太乙壬甲，谓之三式，皆曰内算，言其秘也．九章所载，即《周官》九数，系于方圆者为叀术，皆曰外算，对内而言也．其用相通，不可歧二，独大衍法不载《九章》，未有能推之者，历家演法颇用之，以为方程者误也．且天下之事多矣，古之人先事而计，计定而行，仰观俯察，人谋鬼谋，无所不用其谨，是以不愆于成，载籍章章可复也．后世兴事造始，鲜能考度，浸浸乎天纪人事之殽缺矣，可不求其故哉．九韶愚陋，不闲于艺，然早岁侍亲中都，因得访习于太史，又尝从隐君子受数学．际时狄患，历岁遥塞，不自意全于矢石间，尝险罹忧，荏苒十祀，心槁气落，信知夫物莫不有数也．乃肆意其间，旁诹方能，探索杳渺，粗若有得焉．所谓通神明，顺性命，固肤末于

见，若其小者，窃尝设为问答，以拟于用，积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九类，立术具草，间以图发之，恐或可备博学多识君子之余观，曲艺可遂也，愿进之于道．傥曰艺成而下，是惟畴人府史流也．乌足尽天下之用，亦无蕲焉．时淳祐七年九月鲁郡秦九韶叙．

且系之曰：

昆仑磅礴，道本虚一，圣有大衍，微寓于易，奇余取策，群数皆捐，衍而究之，探隐知原．数术之传，以实为体，其书《九章》，惟兹弗纪．历家虽用，用而不知，小试经世，姑推所为．述大衍第一。

七精回穹，人事之纪，追缀而求，宵星画晷．历久则疏，性智能革，不寻天道，模袭何益．三农务穑，厥施自天，以滋以生，雨膏雪零．司牧闵焉，尺寸验之，积以器移，忧喜皆非．述天时第二。

魁隗粒民，甄度四海，苍姬井之，仁政攸在．代远庶蕃，垦菑日广，步度庀赋，版图是掌．方圆异状，衺窳殊形，启术精微，孰究厥真．差之毫厘，谬乃千百，公私共弊，盍谨其籍．述田域第三．

莫高匪山，莫浚匪川，神禹奠之，积矩攸传．智创巧述，重差夕桀，求之既详，揆之罔越，崇深广远，度则靡容，形格势禁，寇垒仇墉．欲知其数，先望以表，因差施术，坐悉微渺．述测望第四。

邦国之赋，以待百事，畡田经入，取之有度．未免力役，先商厥功，以衰以率，劳逸乃同．汉犹近古，税租以算，调均钱谷，河菑之扞．惟仁隐民，犹己溺饥，赋役不均，宁得勿思．述赋役第五。

物等敛赋，式时府庾，粒粟寸丝，褐夫红女．商征边籴，后世多端，吏缘为欺，上下俱殚．我闻理财，如智治水，澄源浚流，维其深矣．彼昧弗察，惨急烦刑，去理益远，吁嗟不仁．述钱谷第六。

斯城斯池，乃栋乃宅，宅生寄命，以保以聚．鸿功雉制，竹箇木章，匪究匪度，财蠹力伤．围蔡而栽，如子西素，匠计灵台，俾汉文惧．惟武图功，惟俭昭德，有国有家，兹焉取则．述营建第七。

天先五材，兵去未可，不教而战，维上之过．堂堂之阵，鹅鹳为行，营应规矩，其将莫当．师中之吉，惟智仁勇，夜算军书，先计攸重．我闻在昔，轻则寡谋，殄民以幸，亦孔之忧．述军旅第八．

日中而市，万民所资，贾贸墆鬻，利析锱铢．蹛财役贫，封君低首，逐末兼并，非国之厚．述市易第九。

第一章 大 衍 类

关于大衍术的论著，说来已是数见不鲜了．溯自十九世纪以来，其中具有创造性地论述，如张敦仁氏的《求一算术》(1803 年)，骆腾凤氏的《艺游录》(1843 年)，时曰醇氏的《求一术指》，黄宗宪氏的《求一术通解》(1874 年)，钱宝琮氏的《求一术源流考》(1921 年)，徐震池氏的《商余求原法》(1925 年)等，大都有所发挥，尤以对于叙述方面的改进和运算过程的化简，更是这一阶段的特色(详见李俨《大衍求一术的过去与未来》)．

近年来，笔者在攻研中算史时，每感大衍术问题的繁复深奥和变化多端，不易掌握其精神实质．对于初学的人，更是茫然若无边际．兹将管见所及，不揣简陋，愿就大衍术问题的本质，秦九韶氏在大衍术方面的贡献，秦氏术中某些缺点的补救方法，大衍术运算过程的化简等诸问题，作一简略的论述．

一、何谓大衍术

设给予一次同余式组：

$$x\equiv a_1(\mathrm{mod}\ m_1),\ x\equiv a_2(\mathrm{mod}\ m_2),\ \cdots,\ x\equiv a_k(\mathrm{mod}\ m_k) \quad (1)$$

式中的 a_i，$m_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，都是整数．

定理一 如果$(m_i,\ m_j)=1(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k;\ i\neq j)$，并设

$$v=\prod_{i=1}^{k} m_i,\quad \frac{v}{m_i}=M_i$$

且 $M_ix_i\equiv1(\mathrm{mod}\ m_i)$，则组(1)的全部解答，可由

$$x\equiv N=\sum_{i=1}^{k} M_ix_ia_i(\mathrm{mod.}\ v) \quad (2)$$

确定之.

证明: 因 $(m_i, m_j)=1$, 故 $M_j x_j a_j \equiv 0 \pmod{m_i}$. 乃得

$$N \equiv M_i x_i a_i \equiv a_i \pmod{m_i}.$$

因此, $x \equiv N$ 就适合组(1). 反之, 由于组(1)和

$$x \equiv N \pmod{m_1},\ x \equiv N \pmod{m_2},\ \cdots,\ x \equiv N \pmod{m_k} \tag{3}$$

等价. 从而可得

$$x-N \equiv 0 \pmod{m_1},\ x-N \equiv 0 \pmod{m_2},\ \cdots,$$
$$x-N \equiv 0 \pmod{m_k}.$$

复因 $(m_i, m_j)=1$, 故得

$$x-N \equiv 0 \pmod{v}.$$

这就说明了所有组(3)的解, 也是(2)式的解. 亦即组(1)和(2)式是等价的.

定理二 如果 $(m_i, m_j)=d$, 则当且只当

$$a_i \equiv a_j \pmod{d} \text{ 或 } a_i = nd + a_j\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \tag{4}$$

成立时, 组(1)才有解.

证明 因 $(m_i, m_j)=d$, 故可取

$$\frac{m_i}{d}=m_i',\ \frac{m_j}{d}=m_j',$$

于是有 $(m_i', m_j')=1$ 和 $m_{ij}=[m_i, m_j]=m_i'm_j'd$. 由于 $a_i=nd+a_j$, 兹设 $n=c_jm_j'-c_im_i'$, 则

$$a_i=d(c_jm_j'-c_im_i')+a_j.$$

更取 $a_{ij}=c_im_i+a_i=c_jm_j+a_j$, 因得

$$a_{ij} \equiv a_i \pmod{m_i},\ a_{ij} \equiv a_j \pmod{m_j}.$$

(i) 若 m_{ij} 与其它各模 m_l $(l=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, k)$ 之间, 这时已经是两两互素的话, 那么我们根据定理一的证明, 可设

$$v=m_1m_2\cdots m_{i-1}m_{ij}m_{i+1}\cdots m_{j-1}m_{j+1}\cdots m_k,$$

$$\frac{v}{m_1}=M_1,\quad \frac{v}{m_2}=M_2,\quad \cdots,\quad \frac{v}{m_{i-1}}=M_{i-1},\quad \frac{v}{m_{ij}}=M_{ij},$$
$$\frac{v}{m_{i+1}}=M_{i+1},\quad \cdots,\quad \frac{v}{m_{j-1}}=M_{j-1},\quad \frac{v}{m_{j+1}}=M_{j+1},\quad \cdots,$$
$$\frac{v}{m_k}=M_k;$$

$M_1x_1\equiv 1(\text{mod. } m_1)$, $M_2x_2\equiv 1(\text{mod. } m_2)$, $\cdots$,
$M_{i-1}x_{i-1}\equiv 1(\text{mod. } m_{i-1})$, $M_{ij}x_{ij}\equiv 1(\text{mod. } m_{ij})$,
$M_{i+1}x_{i+1}\equiv 1(\text{mod. } m_{i+1})$, $\cdots$, $M_{j-1}x_{j-1}\equiv 1(\text{mod. } m_{j-1})$,
$M_{j+1}x_{j+1}\equiv(\text{mod. } m_{j+1})$, $\cdots$, $M_kx_k\equiv 1(\text{mod. } m_k)$.

则

$$\begin{aligned}x\equiv N=&M_1x_1a_1+M_2x_2a_2+\cdots+M_{i-1}x_{i-1}a_{i-1}\\&+M_{ij}x_{ij}a_{ij}+M_{i+1}x_{i+1}a_{i+1}+\cdots+M_{j-1}x_{j-1}a_{j-1}\\&+M_{j+1}x_{j+1}a_{j+1}+\cdots+M_kx_ka_k(\text{mod. } v)\end{aligned}$$

(式中 v 是诸模的最小公倍数),便是组(1)的全部解答. 盖由

$$M_{ij}x_{ij}\equiv 1(\text{mod. } m_{ij}),$$

可得

$$M_{ij}x_{ij}\equiv 1(\text{mod. } m_i)\text{和 } M_{ij}x_{ij}\equiv 1(\text{mod. } m_j).$$

因有

$$M_{ij}x_{ij}a_{ij}\equiv a_i(\text{mod. } m_i)\text{和 } M_{ij}x_{ij}a_{ij}\equiv a_j(\text{mod. } m_j).$$

换句话说,这时组(1)和

$$x\equiv a_1(\text{mod. } m_1),\ x\equiv a_2(\text{mod. } m_2),\ \cdots,\ x\equiv a_{i-1}(\text{mod. } m_{i-1}),$$
$$x\equiv a_{ij}(\text{mod. } m_{ij}),\ x\equiv a_{i+1}(\text{mod. } m_{i+1}),\ \cdots,$$
$$x\equiv a_{j-1}(\text{mod. } m_{j-1}),\ x\equiv a_{j+1}(\text{mod. } m_{j+1}),\ \cdots,$$
$$x\equiv a_k(\text{mod. } m_k).$$

等价.

(ii) 若诸模间,有 $(m_i, m_j)=d$, $(m_{i_1}, m_{j_1})=d_1$, $\cdots$, $(m_{i_t}, m_{j_t})=d_t$, 则可分别找出 a_{ij}, $a_{i_1j_1}$, $\cdots$, $a_{i_tj_t}$ 和 m_{ij}, $m_{i_1j_1}$, $\cdots$, $m_{i_tj_t}$. 假如这时诸模之间两两互素时, 则可仿照上述方法, 求得组(1)的

全部解答:

$$x \equiv N = \Sigma M_s x_s a_s + \Sigma M_{ij} x_{ij} a_{ij} \pmod{v}.$$

(iii) 若诸模 m_s 和 m_{ij} 或诸 m_s 之间或诸 m_{ij} 之间,仍有公约数时,仍照上述方法,亦可求出组(1)的全部解答:

$$x \equiv N = \Sigma M_s x_s a_s + \Sigma M_{ij} x_{ij} a_{ij} + \Sigma M_{ijs} x_{ijs} a_{ijs}$$

$$+ \Sigma M_{i_r j_r i_{r'} j_{r'}} x_{i_r j_r i_{r'} j_{r'}} a_{i_r j_r i_{r'} j_{r'}} + \cdots \pmod{v}.$$

这就证明了只要(4)式成立,组(1)便有解.

反之,若 N 为组(1)的解,则因

$$N \equiv a_i \pmod{m_i},\ N \equiv a_j \pmod{m_j},$$

从而可得

$$N = c_i m_i + a_i = c_j m_j + a_j.$$

$$\therefore\quad a_i = (c_j m_j - c_i m_i) + a_j = d(c_j m_j' - c_i m_i') + a_j = nd + a_j.$$

式中 $n = c_j m_j' - c_i m_i$. 于是证明了只要组(1)有解,(4)式便成立.

显然,当组(1)的诸模 m_i 之间,都是两两互素时,则不论 a_i 是如何的整数,而组(1)恒有解.

定理三 如果组(1)有解,而 $v = [m_1, m_2, \cdots, m_k] = m_1' \cdot m_2' \cdots m_k'$ (m_i' 为 m_i 的约数),且 $(m_i', m_j') = 1$ $(i, j = 1, 2, \cdots, k; i \neq j)$. 并设

$$\frac{v}{m_i'} = M_i,$$

且 $M_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i'}$, 则组(1)的全部解答,可由

$$x \equiv N = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i a_i \pmod{v} \tag{2}$$

确定之.

证明 当 $(m_i, m_j) = d$ 时,可设 $d = d_i d_j$, 而 $m_i = m_i'' d_i d_j$, $m_j = m_j'' d_i d_j$. 在这里,我们取 $m_i'' d_i = m_i'$ 和 $m_j'' d_j = m_j'$ 且使 $(m_i', m_j') = 1$. 不失证明的一般性,现在我们仅就

$$x \equiv a_i \pmod{m_i'} \text{和} x \equiv a_j \pmod{m_j'}$$

来讨论．依据所设条件，可知

$$M_ix_ia_i \equiv a_i(\text{mod. } m_i'),\quad M_jx_ja_j \equiv a_j(\text{mod. } m_j').$$

从而可得

$$N_{ij} = M_ix_ia_i + M_jx_ja_j \equiv a_i(\text{mod. } m_i'),$$

$$N_{ij} = M_ix_ia_i + M_jx_ja_j \equiv a_j(\text{mod. } m_j'),$$

和

$$N_{ij} = M_ix_ia_i + M_jx_ja_j \equiv N_{i,j,0}(\text{mod. } m_i'm_j').$$

式中 $N_{i,j,0}$ 是模 $m_i'm_j'$ 的最小剩余数．又因 m_j 是 $m_i'm_j'$ 的约数，故有

$$N_{ij} = M_ix_ia_i + M_jx_ja_j \equiv N_{i,j,0}\quad (\text{mod. } m_j).$$

复将 $a_i = nd + a_j$（因为是有解的情形）代入上式，得

$$N_{ij} = ndM_ix_i + M_ix_ia_j + M_jx_ja_j \equiv a_j(M_ix_i + M_jx_j)\quad (\text{mod. } m_j). \tag{5}$$

次因 $M_ix_i \equiv 1(\text{mod. } m_i')$，$M_jx_j \equiv 1(\text{mod. } m_j')$，故

$$M_ix_i + M_jx_j \equiv 1\quad (\text{mod. } m_i'm_j')$$

且

$$M_ix_i + M_jx_j \equiv 1\quad (\text{mod. } m_j) \tag{6}$$

把(6)式结果代入(5)式，因得

$$N_{ij} = M_ix_ia_i + M_jx_ja_j \equiv a_j\quad (\text{mod. } m_j).$$

同理可得

$$N_{ij} = M_ix_ia_i + M_jx_ja_j \equiv a_i\quad (\text{mod. } m_i).$$

这样我们推广到一般情形，便有

$$N = \sum_{i=1}^{k} M_ix_ia_i \equiv a_i\quad (\text{mod. } m_i).$$

从而证明了上述的论断．

【注】 定理一，是一般数论教科书中所给出的．定理二，在И.М. Виноградов 著，裘光明译：《数论基础》的习题里提了一下，并未给出证明．同时我们从"古历会积"和"程行相及"二问中，可以知道秦九韶氏是没有掌握定理二的理论的．定理三，是个人根据

秦氏整个大衍类的运算理论和过程总结出来的．这是秦氏高度创造性的具体表现．这个定理，对于学习数论的同志们，是有着很大的参考价值的．

例 1．《孙子算经》卷下所载："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何．答曰二十三．"

解： 依据题意，列式于次；

$$x\equiv 2(\mathrm{mod}.3),\ x\equiv 3(\mathrm{mod}.\ 5),\ x\equiv 2(\mathrm{mod}.\ 7).$$

这里 $m_1=3,\ m_2=5,\ m_3=7,\ v=105$．

$$M_1=\frac{v}{m_1}=35,\quad M_2=\frac{v}{m_2}=21,\quad m_3=\frac{v}{m_3}=15.$$

$x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=1$．$a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=2$．把这些结果代入(2)式，得

$$N=\sum_{i=1}^{3}M_ix_ia_i=35\cdot 2\cdot 2+21\cdot 1\cdot 3+15\cdot 1\cdot 2$$
$$=233\equiv 23(\mathrm{mod}.\ 105).$$

例 2． 解次之一次同余式组：

$$x\equiv 2(\mathrm{mod}.\ 6),\ x\equiv 4(\mathrm{mod}.\ 9).$$

解： 因 $(6,\ 9)=3$，假若所给的同余式组有解，则(4)式的关系应存在．但

$$2\not\equiv 4(\mathrm{mod}.\ 3),$$

因知这组同余式无解．

例 3． 解下面的一次同余式组：

$$x\equiv 10(\mathrm{mod}.\ 715),\ x\equiv 140(\mathrm{mod}.\ 247),\ x\equiv 245(\mathrm{mod}.\ 391).$$

解： $a_1=10,\ a_2=140,\ a_3=245$．$m_1=715,\ m_2=247,\ m_3=391$．$m_1'=55,\ m_2'=247,\ m_3'=391,\ v=5311735$．$M_1=\frac{v}{m_1'}=96577$，$M_2=\frac{v}{m_2'}=21505$，$M_3=\frac{v}{m_3'}=13585$．$x_1=18,\ x_2=139,\ x_3=43$．将上列诸值代入(2)式，即得

$$N=\sum_{i=1}^{3}M_ix_ia_i=96577\cdot18\cdot10+21505\cdot139\cdot140$$
$$+13585\cdot43\cdot245$$
$$=578989135\equiv10020\pmod{5311735}.$$

这里的问题,是怎样由 a_i, m_i 求出 m_i', M_i, x_i 和

$$N=\sum_{i=1}^{k}M_ix_ia_i.$$

显然只要能把 N 求出来,则关于模 v 的最小剩余数 N_0, 便很容易由

$$N_0=N-Kv\quad(K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

给出之. 这些从 a_i, m_i 来求 N_0 的一步一步地运算方法, 就叫做大衍术. 换句话说,大衍术就是解一次同余式组的整个过程.

伟大的古代数学家秦九韶氏,远在十三世纪的四十年代里,已经把这些问题给我们完全解决了. 同时又把问题的范围, 扩大到了有理数域. 虽然在叙述和演算的过程中,还有一些小的缺点,但秦氏的这种卓越辉煌的成就, 的确是优美精微而足以令人惊讶的.

二、释秦氏大衍总数术

按"大衍总数术",原载于卷一第一问"蓍卦发微"问答之后.因有详加解释的必要,所以把它放在这里.

【原术第一段】,大衍总数术曰:置诸问数,类名有四. 一曰元数,谓尾位见单零者,本门揲蓍酒息斛粜砌砖先米之类是也. 二曰收数, 谓尾位见分厘者,假令冬至三百六十五日二十五刻, 欲与甲子六十日为一会而求积日之类. 三曰通数,谓诸数各有分子母者,本门问一会积年是也. 四曰复数.谓尾位见十或百及千以上者,本门筑堤并急足之类是也.

【释义】 求大衍总数 N 的方法,是先把诸问数(模)m_1, m_2,

…, m_k 等列举出来. 秦氏并把诸问数扩大到有理数域, 共分为四类:

1. 元数就是普通的整数,

2. 收数是含有小数的有理数,

3. 通数就是分数,

4. 复数是"10^n 倍型($n\geqslant1$)"的整数(复数另有新释, 见后原术第五段的释义).

【原术第二段】 元数者,先以两两连环求等,约奇弗约偶. 或约得五,而彼有十,乃约偶而弗约奇. 或元数俱偶,约毕可存一位见偶. 或皆约而犹有类数存, 姑置之, 俟与其他约遍, 而后乃与姑置者求等约之. 或诸数皆不可尽类,则以诸元数命曰复数,以复数格入之.

【释义】 如果所给的诸问数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$, 都是普通的整数, 我们便先在它们中间,用互相减损[注]的方法,求每一对数 m_i, m_j.

【注】九章算术方田章约分术告诉我们:"等"就是两个整数的最大公约数. "连环求等"是用互相减损法求最大公约数. 其法是"以少减多,互相减损",和现代的"辗转相除法"有些相仿。例如求 125 和 50 的最大公约数,可以次式表示之:

$$\begin{array}{rr} & 125 \\ (1) & -50 \\ \hline & 75 \\ (2) & -50 \\ \hline & 25 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 50 \\ (3) & -25 \\ \hline & 25 \end{array}$$

因知 25 便是它们的最大公约数.

m_i, m_j(i, $j=1$, 2, …, k; $i\neq j$)的最大公约数(m_i, m_j)$=d_{ij}$, 并用 d_{ij} 约其中的一数. 若 m_i, m_j 是一奇一偶, 便用 d_{ij} 约奇数不约偶数. 如(15, 18)=3, 应约为(5, 18)=1, 不要约成(15, 6)$\neq$1. 特别地, 两数的尾位, 一个是"5"而另一个仅有一个"0"时, 便用 d_{ij} 约偶数不约奇数. 如(25, 10)=5, 应约为(25, 2)=1, 不要约成(5,

10)≠1. 若 m_i, m_j 都是偶数, 则约得的结果, 应使其中之一为偶数. 如(6, 4)=2, 应约为(3, 4)=1, 不要约成(6, 2)≠1. 这是秦氏"求等化简"和想着达到"约后无等"的规定和基本原则 [按照秦氏的基本原则, 不一定给出最简的情形. 例如(45, 48)=3, 若约为(45, 16)=1. 如果按照规定, 则应约为(15, 48)≠1. 不过在这种情形下, 自有"复乘求定"的方法来补救. 总之, 秦氏的原则, 是指示给我们在求定数时的一个简易可行的规律而已], 借以求得定数 m_1', m_2', …, m_k' 等.

例. 设 $m_1=108$, $m_2=57$, $m_3=75$, $m_4=40$. 求定数 m_i

解. 将 m_i 写成数列:

$$108,\ 57,\ 75,\ 40 \qquad (\alpha)$$

先以 m_1 与其它各数两两求等约之. (108, 57)=3, "约奇弗约偶", 应约为(108, 19)=1. 数列(α)化为

$$\mathbf{108},\ 19,\ 75,\ 40$$

又(108, 75)=3, "约奇弗约偶", 应约为(108, 25)=1. 数列(β)化为

$$\mathbf{108},\ 19,\ \mathbf{25},\ 40$$

又(108, 40)=4, "二数俱偶, 约毕可存一位见偶", 应约为(27, 40)=1. 数列(γ)化为

$$\mathbf{27},\ 19,\ 25,\ \mathbf{40} \qquad (\delta)$$

次以 m_2 与其它各数(m_1 除外)两两求等约之. (19, 25)=1, 不约. (19, 40)=1, 不约.

再以 m_3 与其它各数(m_1, m_2 除外)两两求等约之. (25, 40)=5, "或约得五, 而彼有十. 乃约偶而弗约奇", 应约为(25, 8)=1. 数列(δ)化为

$$27,\ 19,\ \mathbf{25},\ \mathbf{8} \qquad (\varepsilon)$$

数列(ε)便是所求的定数.

在"求等化简"的过程中, 若发现不论怎样约, 都有公约数存在

时，如(75, 90)=15，不论是约为(5, 90)≠1或是约成(75, 6)≠1. 一般地说，若$(m_i, m_j)=d_{ij}$而约后为$(m_i, m'_j)\neq 1$[或$(m'_i, m_j)\neq 1$]时(以后这两个数之间，便不再求等化简了.)，我们可以暂时不去管m'_j(或m_j)，等到用m_i(或m'_i)和其它各数求等遍约之后，再用m'_j(或m_j)和其它各数两两连环求等而约之.

例 设$m_1=75$, $m_2=180$, $m_3=66$. 求定数m'_i.

解 将m_i写成数列:

$$75,\ 180,\ 66 \qquad (\alpha)$$

(75, 180)=15, 不论是约成(75, 12)≠1或是约成(5, 180)≠1. 这时可以按照"或约得五，而彼有十，乃约偶而弗约奇"的原则，约为75, 12. 数列(α)化为

$$\mathbf{75},\ \mathbf{12},\ 66 \qquad (\beta)$$

(75, 66)=3, "约奇弗约偶"，应约为(25, 66)=1, 数列(β)化为

$$\mathbf{25},\ 12,\ \mathbf{66} \qquad (\gamma)$$

(12, 66)=6, "约毕可存一位见偶"，应约为(12, 11)=1. 数列(γ)化为

$$25,\ \mathbf{12},\ \mathbf{11} \qquad (\delta)$$

数列(δ)便是所求的定数.

每一对数m_i, m_j, 都经过求等化简之后，如果它们之间，依然存在着公约数时("或皆约而犹有类数存"中的"类数"，指的是具有公约数的两个或两个以上的数). 我们便把它们叫做复数，而应用复数格中"复乘求定"的道理来处理它们.

例 设$m_1=12$, $m_2=126$, $m_3=98$. 求定数.

解 将m_i写成数列:

$$12,\ 126,\ 98 \qquad (\alpha)$$

(12, 126)=6. "约毕可存一位见偶"，应约为12, 21. 数列(α)化为

$$\mathbf{12},\ \mathbf{21},\ 98 \qquad (\beta)$$

(12, 98)=2. “约毕可存一位见偶”,应约为(12, 49)=1. 数列(β)化为

$$\mathbf{12},\ 21,\ \mathbf{49}$$

(21, 49)=7,应约为(3, 49)=1. 数列(γ)化为

$$12,\ \mathbf{3},\ \mathbf{49} \qquad (\delta)$$

但数列(δ)仍不能作为定数. 因$(12, 3)\neq 1$, 尚未能尽类. 这时便要应用复数格中“复乘求定”的道理,才能得到解决.

【原术第三段】 收数者,乃命尾位分厘作单零,以进所问之数. 定位讫,用元数格入之. 或如意立数为母,收进分厘,以从所问,用通数格入之.

【释义】 如果所给的诸问数,都含有小数或者一部分含有小数,这时可将诸问数乘以10^n(n是诸问数小数部分的最大位数.)使之全部化为整数,而应用元数格去处理它们. 或者找出适当的分母,把小数部分化成分数,而应用通数格去处理它们.

这里应该说明一下,不仅m_i可以含有小数,而且a_i也可以含有小数. 盖若

$$N\equiv a_i \quad (\mathrm{mod.}\ m_i) \qquad (7)$$

则

$$N=K_i m_i+a_i \qquad (7')$$

但(7)式是不能直接应用整数的“同余”性质来进行运算的. 如果我们以10^n(n是a_i, m_i中小数部分的最大位数). 乘(7′)式的两端,则可化为

$$10^n N=K_i\cdot 10^n m_i+10^n a_i$$

即

$$10^n N\equiv 10^n a_i \quad (\mathrm{mod.}\ 10^n m_i) \qquad (8)$$

这时$10^n a_i$和$10^n m_i$都是整数,便可应用元数格去处理了. 但这样由元数格所求得的结果是$N_0'=10^n N_0$, 因之原问题的答案为

$$N_0=\frac{N_0'}{10^n} \tag{9}$$

一般情形,N_0 仍然是一个含有小数的数.

例 某数以 1.7 除之余 1.1, 以 1.2 除之余 1. 求某数.

解 先化为元数格,各数乘以 10 后,则得次式:

$$x\equiv 11(\text{mod. }17),\ x\equiv 10(\text{mod. }12).$$

这里 $a_1=11$, $a_2=10$, $m_1=17$, $m_2=12$, $v=204$. $M_1=\frac{v}{m_1}=12$, $M_2=\frac{v}{m_2}=17$. $x_1=10$, $x_2=5$. 将各值代入(2)式,得

$$N'=12\cdot 10\cdot 11+17\cdot 5\cdot 10\equiv 130\quad(\text{mod. }204).$$

$$\therefore\quad N_0=\frac{N_0}{10}=\frac{130}{10}=13.$$

【原术第四段】 通数者,置问数,通分内子,互乘之,皆曰通数.求总等,不约一位,约众位,得各元法数,用元数格入之.或诸母数繁,就分从省通之者,皆不用元,各母仍求总等,存一位,约众位,亦各得元法数,亦用元数格入之.

【释义】 如果所给的诸问数,都是分数或者一部分是分数,这时可将它们先化成假分数,次用分子分别遍乘其它分数的分母,这样得到的一组整数,叫做通数.次求诸通数的最大公约数 g,保留其中的一个通数不约而用 g 遍约其它各通数,就得到元法数,而应用元数格去处理它们.假若分母的数字较大时,则可于通分内子之后,先求诸分母的最大公约数 g',保留一个分母不约而用 g' 遍约其它各分母,然后再去互乘,也可以得到元法数,亦应用元数格去处理它们.

在这里,我们再来说明一个事实.在通数格中,不仅 m_i 可以是分数,而且 a_i 也可以是分数.盖由

$$N\equiv a_i\quad(\text{mod. }m_i) \tag{10}$$

可得

$$\lambda N \equiv \lambda a_i (\bmod.\ \lambda m_i) \tag{11}$$

式中 λ 是 a_i, m_i 的分母的最小公倍数. 这时所有的 λa_i, λm_i, 都已化为整数, 即可用元数格去处理它们了. 而这样所得的结果是 $N'_0=\lambda N_0$, 故原问题的答案为

$$N_0=\frac{N'_0}{\lambda} \tag{12}$$

一般说来, N_0 依然是一个分数.

例 某数以 2/5 约之余 7/30, 以 2/3 约之余 1/2. 求某数.

解 先把问题化为元数格. 因 $\lambda=30$, 故得

$$x\equiv 7(\bmod.\ 12),\ x\equiv 15(\bmod.\ 20).$$

在这里, $m_1=12$, $m_2=20$, $m'_1=12$, $m'_2=5$, $v=60$. $M_1=\frac{v}{m'_1}=5$, $M_2=\frac{v}{m'_2}=12$. $a_1=7$, $a_2=15$, $x_1=5$, $x_2=3$. 将上列数值代入(2)式, 得

$$N'=5\cdot 5\cdot 7+12\cdot 3\cdot 15\equiv 55(\bmod.\ 60).$$

$$\therefore\quad N_0=\frac{N'_0}{\lambda}=\frac{55}{30}=11/6.$$

其次, 我们还要说明: "由通数求总等存一位约众位"的方法, 是无法确定(12)式中的 λ 值的. 例如:

$$m_1=4\frac{2}{3},\ m_2=\frac{1}{2},\ m_3=1\frac{1}{6}.$$

通分内子互乘之后, 可得数列:

$$168,\ 18,\ 42 \tag{α}$$

通数的总等为: $(168, 18, 42)=6$.

(i) 保留 168 不约而以 6 遍约其它各数, 则数列(α)化为

$$168,\ 3,\ 7 \tag{β}$$

数列(β)即是元法数. 继续求定数, 得 8, 3, 7 和 $v=168$. 而这时的数列(β)是 $36m_1$, $6m_2$, $6m_3$.

(ii) 保留 18 不约而以 6 遍约其它各数, 则数列(α)化为

$$28,\ 18,\ 7 \qquad (\gamma)$$

数列(γ)即是元法数．继续求定数，得4，9，7和$v=252$，而这时的数列(γ)是$6m_1$，$36m_2$，$6m_3$．

(iii) 保留42不约而以6遍约其它各数，得元法数数列

$$28,\ 3,\ 42 \qquad (\delta)$$

继续求定数得28，1，3和$v=84$．而这时的数列(δ)是$6m_1$，$6m_2$，$36m_3$．

假如直接把通数作为元法数而应用元数格处理时，则λ便是诸分母的连乘积．在本例中，即$\lambda=2\cdot3\cdot6=36$．而定数为8，9，7．和$v=504$．显然在整个过程中，其最简单的运算，便是先求出$\lambda=[2,\ 3,\ 6]=6$，以乘各问数m_i，即得元法数数列：

$$28,\ 3,\ 7 \qquad (\varepsilon)$$

继续求定数，得4，3，7．从而$v=84$．

【原术第五段】“复数者，问数尾位见十以上者．以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数．两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶．或约偶弗约奇，复乘奇．或彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼，则必复乘此，乃得定数．所有元数收数通数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之”．

事实上，“10^n倍型”的诸数，不必另设一格，即以元数格λ之即可．“以诸数求总等存一位约众位”的方法，是不够严密的．兹举例以明之．

例　设$m_1=600$，$m_2=120$，$m_3=180$．求定数m_i'及衍母v．

解　将m_i写成数列：

$$600,\ 120,\ 180 \qquad (\alpha)$$

$(600,\ 120,\ 180)=60$．不约一位(如600)约众位后，可得数列：

$$600,\ 2,\ 3$$

(i) 如果照原术所述，即从数列(β)中用“复乘求定”的方法来

进行运算,则得定数

$$25,\ 16,\ 9 \qquad (\gamma)$$

因得 $v=3600$.

(ii) 如果把数列(β)作为元数,复以元数格 λ 之,则其定数为

$$200,\ 1,\ 3 \qquad (\delta)$$

因得 $v=600$.

(iii) 如果直接把数列(α)作为元数格来处理时则其定数为

$$25,\ 8,\ 9 \qquad (\delta)$$

从而 $v=1800$.

从本例中验知,由数列(δ)所确定的定数和衍母 $v=600$,是错误的.由数列(γ)所得到的定数也是错误的,而其衍母 $v=3600$,是 m_i 的公倍数而不是最小公倍数.诚如馆案语:"复数求元数,用总等法,尚属未密,盖总等约后,有当连环求等者,有当即求续等者,其法不能定也."因此我建议把这段原术改为:"复数者,无数两两连环求等遍约之后而不能尽类之数也,此时可用复乘求定之理为之.术曰:复将诸数两两连环求等,……,乃得定数."并将"所有无数收数通数三格,皆有复乘求定之理,悉可入之."删去.

【释义】 诸元数两两连环求等遍约之后,如果它们之间,依然存在着公约数时,就叫做复数,这时可用复乘求定的道理来进行运算.复乘求定的方法是这样的:复将诸数两两连环求等,或者是以"等"约奇而乘偶,或者是以"等"约偶而乘奇.这样相约相乘之后,若仍有公约数存在时,我们再将其中有公约数的诸数,用互相减损法,以求它们的"续等",以"续等"约其中的一数,便乘另外的一数.最后使得它们的任意二数之间,都没有公约数时,也就是"约后无等"的这些数 m_1', m_2', $\cdots$, m_k' 叫做定数(或定母).

例 1 设 $m_1=12$, $m_2=126$, $m_3=98$.求定数 m_i'.

解 将 m_i 写成数列:

$$12,\ 126,\ 98 \qquad (\alpha)$$

(12, 126)=6. 约为 12, 21. 数列(α)化为

$$\mathbf{12},\ \mathbf{21},\ 98 \qquad (\beta)$$

(12, 98)=2, 约为(12, 49)=1, 数列(β)化为

$$\mathbf{12},\ 21,\ \mathbf{49} \qquad (\gamma)$$

(21, 49)=7. 约为(3, 49)=1. 数列(γ)化为

$$12,\ \mathbf{3},\ \mathbf{49} \qquad (\delta)$$

数列(δ)是诸元数两两求等遍约之后而尚未能尽类的数列, 因知其为复数格. 兹用复乘求定的方法来处理它们.

(12, 3)=3, 以 3 约 12 而乘 3, 得

$$\mathbf{4},\ \mathbf{9},\ 49 \qquad (\varepsilon)$$

数列(ε)便是所求的定数.

注意. (12, 3)=3, 是否可以用 3 约 3 而乘 12 呢? 不妨试一试看. 那样将给出数列

$$36,\ 1,\ 49 \qquad (\zeta)$$

而 $m_1'=36$ 便不是 $m_1=12$ 的约数了. 这样便违反了<壹>中定理三的约定, 显然是不允许的.

例 2 设 $m_1=54$, $m_2=57$, $m_3=75$, $m_4=72$. 求定数.

解 将 m_i 写成数列:

$$54,\ 57,\ 75,\ 72 \qquad (\alpha)$$

(54, 57)=3, 约为(54, 19)=1. 数列(α)化为

$$\mathbf{54},\ \mathbf{19},\ 75,\ 72 \qquad (\beta)$$

(54, 75)=3. 约为(54, 25)=1. 数列(β)化为

$$\mathbf{54},\ 19,\ \mathbf{25},\ 72 \qquad (\gamma)$$

(54, 72)=18, 约为 3, 72. 数列(γ)化为

$$\mathbf{3},\ 19,\ 25,\ \mathbf{72} \qquad (\delta)$$

(19, 25)=1, 不约. (19, 72)=1, 不约. (25, 72)=1, 不约. 但数列(δ)尚未能尽类, 应以复乘求定之理入之. 因(3, 72)=3, 以 3 约 72 而乘 3, 得

$$\mathbf{9},\ 19,\ 25,\ \mathbf{24} \qquad (\varepsilon)$$

数列(ε)仍未能尽类，因求续等．(9, 24)＝3，以3约24而乘9，得

$$\mathbf{27},\ 19,\ 25,\ \mathbf{8} \qquad (\zeta)$$

数列(ζ)便是所求的数列．

【原术第六段】 求定数．勿使两位见偶，勿使见一太多，见一多则借用繁，不欲借，则任得一，以定相乘为衍母，以各定约衍母，各得衍数．或列各定为母于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子，亦得衍数。

【释义】 在求定数的过程中，不要使它们中间有两个数是偶数，显然这时违反了"约后无等"的原则．同时也不要使它们中间化成"1"的数太多了，因为见"1"多时借用较繁(实际上，不拘见"1"的多少，都不必借用．请参阅原术第九段 B．的释义)．为了避免借用，则任得一个为"1"的定数就可以了．这时以定数相乘，便可给出衍母 v．即 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 的最小公倍数：

$$v=[m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k]=m_1'm_2'\cdots m_k'.$$

显然式中 m_i' 的确定法，不是唯一的．如(15, 12)＝3，可以约为(5, 12)＝1，也可以约为(15, 4)＝1．

然后再以各定数来约衍母，就分别得到它们的衍数：

$$\frac{v}{m_i'}=M_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k).$$

或者把各定数视同分母列于右行，各立"天元一"为分子列于左行：

左行	右行
1	m_1'
1	m_2'
⋮	⋮
1	m_k'

用其它的分母来乘本位的分子1，也可以得出衍数：

左行	右行
$M_1=m_2'\cdot m_3'\cdots m_k'$	m_1'
$M_2=m_1'\cdot m_3'\cdots m_k'$	m_2'
⋮	⋮
$M_k=m_1'm_2'\cdots m_{k-1}'$	m_k'

上述各段，是由诸问数 m_i 来确定定数 m_i' 衍母 v 和衍数 M_i 的方法和过程．秦氏的由 m_i 确定 m_i' 的叙述和步骤，是比较繁复的．清代黄宗宪氏用析素因数法较为显明，其法是将 m_i 析为

$$m_i=\prod_{s=1}^{r}p_{i_s}^{\alpha_s}=p_{i_1}^{\alpha_1}p_{i_2}^{\alpha_2}\cdots p_{i_r}^{\alpha_r}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,k)\tag{13}$$

式中 p_{i_s} 为素数．在所有 m_i 中，把含有相同的素数 p_{i_s} 的那些数，保留指数 α_s 最高的一个，并以“○”标示之．指数相同的，可任意保留一个，亦以“○”标示之．这样来确定 m_i'，虽然在析素数的过程中，有时某些运算是不必要的，但不易发生错误，而且 m' 很显明地便被确定下来．

例　设 $m_1=5400$，$m_2=735$，$m_3=6174$，$m_4=3500$．求定数 m_i'．

Ⅰ．秦氏法：

m_i	5400,	735,	6174,	3500
(5400, 735)＝15	**5400**,	**49**,	6174,	3500
(5400, 6174)＝18	**5400**,	49,	**343**,	3500
(5400, 3500)＝100	**5400**,	49,	343,	**35**
(49, 343)＝49	5400,	**1**,	**343**,	**35**
(343, 35)＝7	5400,	**1**,	**343**,	**5**
以 5 约 5400 而乘 5	**1080**,	1,	343,	**25**
复以 5 约 1080 而乘 25，得 m_i'	**216**,	**1**,	343,	**125**

II. 黄氏法:

m_i	$=\prod p_i^{\alpha_i}$	m_i'
5400	$=$"2^3"$\cdot$"3^3"$\cdot 5^2$	216
735	$=3\cdot 5\cdot 7^2$	1
6174	$=2\cdot 3^2\cdot$"7^3"	343
3500	$=2^2\cdot$"5^3"$\cdot 7$	125

【原术第七段】 诸衍数，各满定母去之，不满曰奇．以奇与定，用大衍求一入之，以求乘率．或奇得一者．便为乘率．

【释义】 用定数 m_i' 去约它们相对应的衍数 M_i，余数 δ_i 就叫做奇数．以奇数 δ_i 与定数 m_i'，用"大衍求一"的方法，求出它们的乘率 x_i．若奇数 $\delta_i=1$ 时，显然乘率 $x_i=1$．

【原术第八段】 大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上．先以右上除右下，所得商数，与左上一相生，入左下．然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止．乃验左上所得，以为乘率．或奇数已见单一者，便为乘率．

【释义】 大衍求一术，就是由 $M_ix_i\equiv\delta_ix_i\equiv 1(\text{mod}.\ m_i')$，以求乘率 x_i 的具体演算过程．秦氏所给的方法，是以 δ_i 和 m_i' 用"以少除多，递互乘内"的方法得出的．因为当时的计算工具是筹算(可用两把算盘代替之．)，所以在整个运算过程中，随时只需要保留五个数字，它的全部释义，可用下列诸式表示之．

天元：$\alpha_0=1$	奇数：δ_i
空 0	定数：m_i'

(α)

天元：$\alpha_0=1$	奇数：δ_i
空 0	定数：m_i' 商：q_1

(β_1)

天元：$\alpha_0=1$	奇数：δ
归：$\alpha_1=q_1\alpha_0=q_1$	定余：r_1 商：q_1

(β_2)

天元：$\alpha_0=1$	商：q_2 奇数：δ_1
归 $\alpha_1=q_1\alpha=q_1$	定余：r_1

(γ_1)

率：$\alpha_2<q_2\alpha_1+\alpha_0$	商：q_2 奇余：r_2
归：$\alpha_1=q_1\alpha_0=q_1$	定余：r_1

(γ_2)

率：$\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0$	奇余：r_2
归：$\alpha_1=q_1\alpha_0=q_1$	定余：r_1 商：q_3

(δ_1)

率：$\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0$	奇余：r_2
归：$\alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1$	定余 r_3 商：q_3

(δ_2)

······································

率：$\alpha_{n-2}=q_{n-2}\alpha_{n-3}+\alpha_{n-4}$	商：q_n 奇余：r_{n-2}
归：$\alpha_{n-1}=q_{n-1}\alpha_{n-2}+\alpha_{n-3}$	定余：r_{n-1}

(ε_1)

乘率：$\alpha_n=q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}$	商：q_n 奇余：$r_n=1$
归：$\alpha_{n-1}=q_{n-1}\alpha_{n-2}+\alpha_{n-3}$	定余：r_{n-1}

(ε_2)

笔算草式，则以次式表示之，较为适宜。

x_i: $\alpha_n=q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}$	$r_n=1$
$\alpha_{n-2}=q_{n-2}\alpha_{n-3}+\alpha_{n-4}$	$-q_n r_{n-1}$ $r_{n-2}(q_n$
……	……
$\alpha_4=q_4\alpha_3+\alpha_2$	$-q_6 r_5$ $r_4(q_6$
$\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0$	$-q_4 r_3$ $r_2(q_4$
天元: $\alpha_0=1$	$-q_2 r_1$ 奇数: $\delta_4(q_2$
空 0	定数: $m_4'(q_1$ $-q_1\delta_4$
$\alpha_1=q_1\alpha_0=q_1$	$r_1(q_3$ $-q_3 r_2$
$\alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1$	$r_3(q_5$ $-q_5 r_4$
……	……
$\alpha_{n-3}=q_{n-3}\alpha_{n-4}+\alpha_{n-5}$	$r_{n-3}(q_{n-1}$ $-q_{n-1}r_{n-2}$
$\alpha_{n-1}=q_{n-1}\alpha_{n-2}+\alpha_{n-3}$	r_{n-1}

(14)

例　$19x_i\equiv(\text{mod}.\ 49)$，求 x_i.

x_i：$\alpha_6=q_6\alpha_5+\alpha_4=31$	$r_6=1$
$\alpha_4=q_4\alpha_3+\alpha_2=13$	-1 $(r_4)2(1(q_6)$
$\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0=3$	-6 $(r_2)8(2(q_4)$
天元：$\alpha_0=1$	-11 $(\delta_i)19(1(q_2)$
空 0	$(m_i')49(2(q_1)$ -38
$\alpha_1=q_1\alpha_0=2$	$(r_1)11(1(q_3)$ -8
$\alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1=5$	$(r_3)3(1(q_5)$ -2
$\alpha_5=q_5\alpha_4+\alpha_3=18$	$(r_5)1$

【注】　关于本例的珠算解法，可以平面简示图为之：

上盘置 1, 19
下盘置 0, 49

1 * 19
0 * 49

于下盘 加 1 减 19 →

1 * 19
1 * 30

复于下盘 加 1 减 19 →

1 * 19
2 * 11

于上盘 加 2 减 11 →

3 * 8
2 * 11

于下盘 加 3 减 8 →

3 * 8
5 * 3

于上盘 加 5 减 3 →

8 * 5
5 * 3

复于上盘 加 5 减 3 →

13 * 2
5 * 3

于下盘 加 13 减 2 →

13 * 2
18 * 1

于上盘 加 18 减 1 →

31 * 1
18 * 1

图中 * 号，可用画钉于算盘上标出之. 此法的优点，是机械性强，纯用加减法完成运算. 同时上图不仅完成了剩一术的运算，而且也完成了欺一术的运算. 这就是说，上右奇1时，上左为 $Ax\equiv 1 \pmod B$ 的最小正整数解答；下右奇1时，下左为 $Ax\equiv -1 \pmod B$ 的最小正整数解答. 例中下左的18，即是 $19x\equiv -1 \pmod{49}$ 的最小正整数解答.

这个方法，我已经把它命名为"加减求一术". 同时利用两架手摇计算机来完成这类运算，也试验成功了.

【原术第九段】"置各乘率，对乘衍数，得泛用. 并泛用，课衍母，多一者为正用. 或泛多衍母倍数者，验元数，奇偶同类者，损其半倍，或三处同类，以三约衍母，于三处损之. 各为正用数. 或定母得一，而衍数同衍母者，为无用数. 当验元数同类者，而正用至多处借之. 以元数两位求等，以等约衍母为借数，以借数损有以益其无，为正用. 或数处无者，如意立数为母，约衍母，所得以如意子乘之，均借补之. 或欲从省勿借，任之为空可也. 然后其余各乘正用，为各总. 并总，满衍母去之，不满为所求率数.

实际上，我们既经得到乘率 x_i 和衍数 M_i 后，即可直接应用

$$N=\sum_{i=1}^{k} M_i x_i a_i \pmod{v} \tag{2}$$

以求出答案. 至于诸用数之和 $\Sigma M_i x_i$ 是否等于 $v+1$，便没有考查的必要了. 因此我建议：把这段原术，改为："置各乘率，对乘衍数，得用数，其余各乘用数，为各总. 并总，满衍母去之，不满为所求率数". 这对于运算实践来说，有着十分重要的意义.

另一方面，我们在这段内容丰富的文字叙述里，可以看出：秦氏为了制定"正用数"的规格（或者说，为了定义正用数），而且使得每个问数 m_i 都具有用数，于是综合了各种可能的情形，给出了合乎规格的正用数的一般求法. 这种精神，和他在原术第二段中给出了"求等化简"的一般规律，是有同样价值的. 因此这段文字，还

是应该详加解释，才不辜负秦氏的苦心.

【释义】 A．“置各乘率，对乘衍数，得泛用．并泛用，课衍母，多一者为正用．”这一小段的释义，是用乘率 x_i，分别乘它们相对应的衍数 M_i，得泛用数 M_ix_i．盖因 $M_ix_i \equiv 1(\mathrm{mod.}\ m_i')$，故

$$N_1 = \sum_{i=1}^{k} M_ix_i \equiv 1 \quad (\mathrm{mod.}\ v)$$

或

$$N_1 = Kv + 1 \tag{15}$$

若 $K=1$，则 M_ix_i 等即为正用数.

B．“或泛多衍母倍数者，验元数，奇偶同类者，损其半倍，或三处同类，以三约衍母，于三处损之．各为正用数．”这一小段的叙述，是不够严密的．请参阅“古历会积”一问中的“验元数五与十同类而各损其半”的说法．兹再举例以说明之.

例 试解：$x\equiv 4(\mathrm{mod.}\ 15)$，$x\equiv 1(\mathrm{mod.}\ 39)$，
$x\equiv 14(\mathrm{mod.} 26)$.

解：

m_i	15, 39, 26	
m_i'	15, 13, 2	$v=390$
M_i	26, 10, 195	
δ_i	11, 4, 1	
x_i	11, 10, 1	
M_ix_i(泛)	286, 300, 195	$\Sigma M_ix_i=781$
a_i	4, 1, 14	

在这里，泛多衍母一倍，验元数 15, 39 同类，39, 26 亦同类．若于 M_1x_1, M_2x_2 中各损半倍，则其正用数应为 91, 105, 195．而

$$N = 91\cdot 4 + 105\cdot 1 + 195\cdot 14 = 3199 \equiv 79(\mathrm{mod.}\ 390) \tag{α}$$

若于 M_2x_2, M_3x_3 中各损半倍，则正用数应为 286, 105, 0．而

$$N = 286\cdot 4 + 105\cdot 1 + 0\cdot 14 = 1249 \equiv 79 \quad (\mathrm{mod.}\ 390) \tag{β}$$

(α), (β)二式的结果虽然相同，但却都是错误的．因为本题的答案是

$$N=\sum_{i=1}^{3}M_i x_i a_i=286\cdot4+300\cdot1+195\cdot14=4174$$
$$\equiv 274(\mathrm{mod.}\ 390)$$

为了补救这个缺点，特作如下的分析：在(15)式中，若 $K>1$ 时，则必须从 N_1 中减去 $(K-1)v$，才可得到最简单的用数——正用数．盖因这时

$$N_1-(K-1)v=v+1.$$

(i) 诸元数 m_i 中，若有 t 个数 $m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_t}$ 同类且有公约数 $q(q>K-1)$时，则在此 t 个 $M_{i_s}x_{i_s}$ 中各减以

$$q_1\frac{K-1}{q}v<M_{i_1}x_{i_1},\quad q_2\cdot\frac{K-1}{q}v<M_{i_2}x_{i_2},\quad \cdots,$$
$$q_t\frac{K-1}{q}v<M_{i_t}x_{i_t} \tag{16}$$

式中 $q=q_1+q_2+\cdots+q_t(q_s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，即可得到正用数．

证明：I．$\because\ \sum_{s=1}^{t}q_s\frac{K-1}{q}v=(K-1)v$，$\therefore$ 此时用数的总和为 $v+1$．

II．我们还必须证明，不论 a_{i_s} 为何数时，本论断总是正确的．

$$\because\quad a_{i_2}=c_1q+a_{i_1},\ a_{i_3}=c_2q+a_{i_1},\ a_{i_4}=c_3q+a_{i_1},$$
$$\cdots,\ a_{i_t}=c_tq+a_{i_1}\quad(c_j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

所以这时不论 $a_{i_s}(s=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$为何值，我们在 N 中所减去的部分是 v 的整数倍：

$$\sum_{s=1}^{t}q_s a_{i_s}\frac{K-1}{q}v=\left(q\sum_{s=1}^{t}c_sq_s+a_{i_1}\sum_{s=1}^{t}q_s\right)\frac{K-1}{q}v$$
$$=q\left(\sum_{s=1}^{t}c_sq_s+a_{i_1}\right)\frac{K-1}{q}v$$
$$=\left(\sum_{s=1}^{t}c_sq_s+a_{i_1}\right)(K-1)v.$$

在上例中，我们已知泛用数 M_ix_i 为：286，300，195．$\Sigma M_ix_i=$

781，多衍母 $v=390$ 倍数．此时 $K=2$，故 $(K-1)v=v$．又因 $(15,\ 39)=3(q)$，所以我们可取 $q=1+2$．若于 286 中减以 $\frac{v}{3}$，于 300 中减以 $\frac{2v}{3}$，则得正用数：156，40，195．而

$$N=156\cdot4+40\cdot1+195\cdot14=3394\equiv274 \pmod{390}.$$

或于 286 中减以 $\frac{2v}{3}$，于 300 中减以 $\frac{v}{3}$，则正用数为：26，170，195．而

$$N=26\cdot4+170\cdot1+195\cdot14=3004\equiv274 \pmod{390}.$$

复因 $(39,\ 26)=13(q)$，$t=2$，这时的分组方法当然更多．兹任取 $q=7+6$，并于 300 中减以 $\frac{7v}{13}$，于 195 中减以 $\frac{6v}{13}$，则得正用数：286，90，15．而

$$N=286\cdot4+90\cdot1+15\cdot14=1444\equiv274 \pmod{390}.$$

(ii) 诸余数 a_i 中，若有 t' 个数 a_{i_1}，a_{i_2}，…，$a_{i_{t'}}$ 同类且有公约数 $q'(q'>K-1)$ 时，则在 t' 个 $M_{i_{s'}}x_{i_{s'}}$ 中各减以

$$q'_1\cdot\frac{K-1}{q'}v<M_{i_1}x_{i_1},\quad q'_2\cdot\frac{K-1}{q'}v<M_{i_2}x_{i_2},\quad \cdots,$$

$$q'_{t'}\cdot\frac{K-1}{q'}v<M_{i_{t'}}x_{i_{t'}} \tag{17}$$

式中 $q'=q'_1+q'_2+\cdots+q'_{t'}(q'_{s'}=0,1,\ 2,\ \cdots)$，即可给出正用数．

证明：I．$\because \sum\limits_{s'=1}^{t'} q'_{s'}\,\frac{K-1}{q'}v=(K-1)v$，$\therefore$ 此时用数的总和为 $v+1$．

II．因 $a_{i_1}=c'_1q'$，$a_{i_2}=c'_2q'$，…，$a_{i_{t'}}=c'_{t'}q'(c'_j=1,\ 2,\ \cdots)$，所以这时不论 $a_{i_{s'}}$ 所对应的定数 $m'_{i_{s'}}$ 为何值，我们在总数 N 中所减去的数字为 v 的整数倍，即

$$\sum_{s'=1}^{t'} a_{i_{s'}}q'_{s'}\,\frac{K-1}{q'}v=q'\sum_{s'=1}^{t'} c'_{s'}q'_{s'}\,\frac{K-1}{q'}v=\sum_{s'=1}^{t'} c'_{s'}q'_{s'}(K-1)v.$$

从而证明了我们的论断.

仍就上例，其中 $a_1=4$, $a_3=14$, 即 $t'=2$, $q'=2$. 故可于 286 中减以 $\frac{v}{2}$, 于 195 中减去 $\frac{v}{2}$. 得正用数: 91, 300, 0. 而

$$N=91\cdot 4+300\cdot 1+0\cdot 14=664\equiv 274 \pmod{390}.$$

秦氏"古历会积"中"验元数五与十同类而各损其半"的说法，虽然是错误的，但气不及和纪不及为 4, 0, 都是偶数. 所以仅就这一部分的结果来说，仍然是对的.

又《数书九章札记》卷一第 4 页."按术验法元图内诸元数奇偶同类者各损其半. 李氏锐曰：损泛用为定用，当验元数有若干位同等，不问奇偶，即以若干位数约衍母，于若干位泛用内减之，为定. 如此术元数气朔纪三位，以十二为总等. 则三位同等，即以位数三约衍母，以减三位泛用，为定用，不必止损二位也." 李氏在这里所发生的错误，是和秦氏相同的. 在"古历会积"中，是因为气朔纪有公因数 3, 所以"以位数三约衍母，以减三位泛用，为定用."才给出了正确的结果. 假若总等不是 3 的倍数，就会发现这种说法的不妥之处的.

C. "或定母得一，而衍数同衍母者，为无用数. ……. 或欲从省勿借，任之为空可也."这一小段的意义，是说当定母 $m_j'=1$ 时，则其衍数 $\frac{v}{m_j'}=M_j=v\equiv 0 \pmod{v}$. 若 m_j 与 m_i 有公约数 q 时，则在 M_ix_i 中减去 $\frac{v}{q}$, 而使新的 $M_jx_j=\frac{v}{q}$. 显然这时不论 a_i, a_j 为何数，都有

$$\begin{aligned}a_j\frac{v}{q}+a_i\left(M_ix_i-\frac{v}{q}\right)&=(a_i+cq)\frac{v}{q}+a_i\left(M_ix_i-\frac{v}{q}\right)\\&=cv+M_ix_ia_i\equiv M_ix_ia_i \pmod{v}.\end{aligned}$$

实际上，这和不借用的结果，是相同的:

$$M_ix_ia_i+0\cdot a_j\equiv M_ix_ia_i \pmod{v}.$$

当 t 个定母 $m'_{i_1}=m'_{i_2}=\cdots=m'_{i_t}=1$ 时，可以仿照上述方法分组为之．至于"如意立数为母，约衍母，所得以如意子乘之"的方法，只有当 t 个定母所对应的 t 个元数 m_{i_t} 有"总等"的情况下，才可以应用．一般的情形，找那样一个适当的分母，是很困难的．但为了节省时间，我们还是应该采用"或欲从省勿借，任之为空可也"．

D．"然后其余各乘正用，为各总，并总，满衍母去之，不满为所求率数"．这是说正用数 $M_i x_i$ 既经确定之后，即以 a_i 分乘正用，得各总 $M_i x_i a_i$．并各总为总数：

$$N=\sum_{i=1}^{k} M_i x_i a_i.$$

若 $N_0 \leqslant v$，则所求的最小解答为 N_0，即

$$N \equiv N_0 (\mathrm{mod.}\ v) \tag{18}$$

例　解次之一次同余式组：

$x\equiv 0(\mathrm{mod.}\ 5)$，$x\equiv 10(\mathrm{mod.}\ 715)$，$x\equiv 140(\mathrm{mod.}\ 247)$，
$x\equiv 245(\mathrm{mod.}\ 391)$，$x\equiv 109(\mathrm{mod.}\ 187)$．

解：

m_i	5,	715,	247,	391,	187	
(5, 715)=5	**1,**	**715,**	247,	391,	187	
(715, 247)=13	1,	**55,**	**247,**	391,	187	
(55, 391)=1	1,	**55,**	247,	**391,**	187	
(55, 187)=11	1,	**55,**	247,	391,	**17**	
(247, 391)=1	1,	55,	**247,**	**391,**	17	
(247, 17)=1	1,	55,	**247,**	391,	**17**	
(391, 17)=17	1,	55,	247,	**391,**	**1**	
m'_i	1,	55,	247,	391,	1	$v=5311735$
M_i	—	96577,	21505,	13585,	-	

δ_i	— 52, 16, 291, —	
x_i	— 18, 139, 43, —	
M_ix_i	— 1738386, 2989195, 584155, —	$\Sigma M_ix_i=5311736$
a_i	0, 10, 140, 245, 109	
$M_ix_ia_i$	— 17383860, 418487300, 143117935, —	$\Sigma M_ix_ia_i=578989135$

因得

$$N=\sum_{i=1}^{5}M_ix_ia_i=578989135\equiv10020(N_0)$$

$$(\text{mod. } v=5311735).$$

三、如何简化大衍术

I. 关于一次同余式的记法，我同意采用徐震池氏«商余求原法»(«科学»第10卷第2期，1925年5月)中所述的新符号：

$$\left|\frac{N}{m_i}=a_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)\right.$$

或

$$\left|\frac{N}{(m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k)}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k)\right. \tag{19}$$

II. 关于由 m_i 求 m_i' 的方法，我同意黄宗宪氏«求一术通解»中所述的析素因数法. 见上"原术第六段"释义后的注.

III. 关于"奇定求一"即由 δ_i, m_i' 求 x_i 部分，黄宗宪氏已改为直接由定母 m_i' 和衍数 M_i 来求乘率 x_i，形式稍有改进，计算并未简化. 现在我来介绍一种新方法，直接用 m_i', M_i, a_i 来求 X_i，而 M_iX_i 便是各总，即 $M_ix_ia_i\equiv M_iX_i(\text{mod. } v)$. 新方法所给出的 X_i，是适合所给条件的最简单的数字，可以给我们节省很多的数字计算.

A. 算式:

$$
\begin{array}{r|cc|l}
 & & m'_i & \\
\cline{2-3}
p_0) & a_i & M_i & (q_0 \\
 & p_0 m'_i & q_0 m'_i & \\
\hline
 & & R_1 & \\
\cline{2-3}
p_1) & r_1 & m'_i & (q_1 \\
 & p_1 R_1 & q_1 R_1 & \\
\hline
 & & R_2 & \\
\cline{2-3}
p_2) & r_2 & R_1 & (q_2 \\
 & p_2 R_2 & q_2 R_2 & \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \\
\hline
 & & R_n = 1 & \\
\cline{2-3}
p_n) & r_n & R_{n-1} & (q_n \\
 & p_n R_n & q_n R_n & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
\tag{20}
$$

B. 计算方法: 在上式中，先将 a_i, M_i 并列，以 m'_i 分除二数，其商数各为 p_0, q_0, 其余数各为 r_1, R_1. 次以 r_1, m'_i 并列，以 R_1 分除二数，其商数各为 p_1, q_1, 其余数各为 r_2, R_2, …. 这样继续作下去，因为$(m'_i, M_i)=1$, 所以总可求得 $R_n=1$ 而有 $p_n=r_n$, $q_n=R_{n-1}$. 至于 X_i 的具体计算，可用次式给出之。

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha_n = p_n, \\
\alpha_{n-1} = p_{n-1} - q_{n-1}\alpha_n, \\
\alpha_{n-2} = p_{n-2} - q_{n-2}\alpha_{n-1} + \alpha_n, \\
\alpha_{n-3} = p_{n-3} - q_{n-3}\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}, \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots, \\
\alpha_2 = p_2 - q_2\alpha_3 + \alpha_4, \\
X_i = \alpha_1 = p_1 - q_1\alpha_2 + \alpha_3.
\end{array}\right\}
\tag{21}
$$

C. 例题　试解 $\left|\dfrac{N}{(715,\ 247,\ 391)}\right.=(10,\ 140,\ 245)$.

解　已知：$m_1'=55$，$m_2'=247$，$m_3'=391$，$v=5311735$．$a_1=10$，$a_2=140$，$a_3=245$．$M_1=\dfrac{v}{m_1'}=96577$，$M_2=\dfrac{v}{m_2'}=21505$，$M_3=\dfrac{v}{m_3'}=13585$.

(i) 求 X_1.

```
                 55
(p0)0)10      96577(1755(q0)
              96525
      -----------------
                 52
(p1)0)10         55(1(q1)
                 52
      -----------------
                  3
(p2)3)10         52(17(q2)
       9         51
      -----------------
                  1
(p3)1) 1          3(3(q3)
       1          3
      -----------------
             0
```

$$\alpha_3=p_3=1,$$

$$\alpha_2=p_2-q_2\alpha_3=3-17=-14,$$

$$X_1=\alpha_1=p_1-q_1\alpha_2+\alpha_3=0+14+1=15.$$

(ii) 求 X_2.

```
                 247
(p0)0)140   21505(87(q0)
            21489
```

16

$(p_1)8)\overline{140 \quad\quad 247}(15(q_1)$

128 240

7

$(p_2)1)\overline{12 \quad\quad 16}(2(q_2)$

7 14

2

$(p_3)2)\overline{5 \quad\quad 7}(3(q_3)$

4 6

1

$(p_4)1)\overline{1 \quad\quad 2}(2(q_4)$

1 2

0

$$\alpha_4=p_4=1,$$

$$\alpha_3=p_3-q_3\alpha_4=2-3=-1,$$

$$\alpha_2=p_2-q_2\alpha_3+\alpha_4=1+2+1=4,$$

$$X_2=\alpha_1=p_1-q_1\alpha_2+\alpha_3=8-60-1=-53.$$

这里因 $-53\equiv194(\mathrm{mod.}\ 247)$，故亦可用 $X_2=194$.

(iii) 求 X_3.

391

$(p_0)0)\overline{245 \quad\quad 13585}(34(q_0)$

13294

291

$(p_1)0)\overline{245 \quad\quad 391}(1(q_1)$

291

$$
\begin{array}{rrrl}
 & & 100 & \\
(p_2)2) & 245 & 291 & (3(q_2) \\
 & 200 & 300 & \\
\hline
 & & -9 & \\
(p_3)-5) & 45 & 100 & (-11(q_3) \\
 & 45 & 99 & \\
\hline
 & & 1 & \\
(p_4)0) & 0 & -9 & (-9(q_4) \\
 & & -9 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$\alpha_4=p_4=0,$$

$$\alpha_3=p_3-q_3\alpha_4=-5,$$

$$\alpha_2=p_2-q_2\alpha_3+\alpha_4=2+15+0=17,$$

$$X_3=\alpha_1=p_1-q_1\alpha_2+\alpha_3=0-17-5=-22.$$

因 $-22\equiv369(\mathrm{mod.}\ 391)$，故亦可取 $X_3=396$.

兹先取 $X_1=15,\ X_2=-53,\ X_3=-22$. 则

$$M_1X_1=96577\times15=1448655,$$

$$M_2X_2=21505\times(-53)=-1139765,$$

$$M_3X_3=13585\times(-22)=-298870.$$

因得

$$N=\sum_{i=1}^{3}M_iX_i=1448655-1139765-298870=10020\equiv10020$$

$(\mathrm{mod.}\ v)$.

次取 $X_1=15,\ X_2=194,\ X_3=369$，则

$$M_1X_1=1448655,$$

$$M_2X_2=21505\times194=4171970,$$

$$M_3X_3=13585\times369=5012865.$$

因得

$$N=\sum_{i=1}^{3}M_iX_i=1448655+4171970+5012865=10633490$$

$$\equiv 10020 \pmod{v}.$$

D. 与旧法的比较：在上例中，用旧法时，须在 M_i 上分别乘以 $18\cdot10$, $139\cdot140$, $43\cdot245$. 用新法时，只需乘以 15, -53, -22 即可. 显然这两组数字都是正确的. 盖因

$$\left|\frac{18\cdot10}{55}=15,\quad \left|\frac{139\cdot140}{249}=-53,\quad \left|\frac{43\cdot245}{391}=-22.\right.\right.\right.$$

然而新法的运算过程，却简便多了.

E. 新法的理论依据：设有不定方程式

$$m_i'\alpha_0+M_i\alpha_1=a_i \tag{22}$$

式中 α_0, α_1 是变量. 因为 $(m_i', M_i)=1$，所以(22)式有整数解. 一般的解法，是这样进行的.

$$\alpha_0=\frac{a_i-M_i\alpha_1}{m_i'}=p_0-q_0\alpha_1+\frac{r_1-R_1\alpha_1}{m_i'} \tag{23}$$

设 $\alpha_2=\dfrac{r_1-R_1\alpha_1}{m_i'}$，则有

$$\alpha_1=\frac{r_1-m_i'\alpha_2}{R_1}=p_1-q_1\alpha_2+\frac{r_2-R_2\alpha_2}{R_1} \tag{24}$$

次设 $\alpha_3=\dfrac{r_2-R_2\alpha_2}{R_1}$，则有

$$\alpha_2=\frac{r_2-R_1\alpha_3}{R_2}=p_2-q_2\alpha_3+\frac{r_3-R_3\alpha_3}{R_2} \tag{25}$$

$$\cdots\cdots,$$

复设 $\alpha_{n-1}=\dfrac{r_{n-2}-R_{n-2}\alpha_{n-2}}{R_{n-3}}$，则可得

$$\alpha_{n-2}=p_{n-2}-q_{n-2}\alpha_{n-1}+\frac{r_{n-1}-R_{n-1}\alpha_{n-1}}{R_{n-2}} \tag{26}$$

再设 $\alpha_n=\dfrac{r_{n-1}-R_{n-1}\alpha_{n-1}}{R_{n-2}}$，则可得

$$\alpha_{n-1}=p_{n-1}-q_{n-1}\alpha_n+\frac{r_n-R_n\alpha_n}{R_{n-1}} \tag{27}$$

更设 $\alpha'_n=\dfrac{r_n-R_n\alpha_n}{R_{n-1}}$，则有

$$\alpha_n=\frac{r_n-R_{n-1}\alpha'_n}{R_n}=p_n-q_n\alpha'_n+\frac{r'_n-R'_n\alpha'_n}{R_n} \tag{28}$$

因为$(m'_i,\ M_i)=1$，所以我们总可求出 $R_n=1$．这时在(28)式中，因为 $R_n=1$，所以 $\dfrac{r'_n-R'_n\alpha'_n}{R_n}=0$ 且 $p_n=r_n$，$q_n=R_{n-1}$．同时我们给 α'_n 以任意一个整数值，α_n 都有整数值．代入(27)式，α_{n-1} 也是整数值．一直代到(23)，(24)两式，α_0，α_1 也给出整数值．为了使运算简便，兹取 $\alpha'_n=0$，则由(28)式，得

$$\alpha_n=p_n \tag{29}$$

将 $\alpha'_n=0$代入(27)式，得

$$\alpha_{n-1}=p_{n-1}-q_{n-1}\alpha_n \tag{30}$$

由(26)式，可得

$$\alpha_{n-2}=p_{n-2}-q_{n-2}\alpha_{n-1}+\alpha_n \tag{31}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

继续作去，我们最后可得

$$\alpha_2=p_2-q_2\alpha_3+\alpha_4 \tag{32}$$

$$\alpha_1=p_1-q_1\alpha_2+\alpha_3 \tag{33}$$

这就证明了我们的新方法．不过(20)式，是用了一个运算简捷形式显明的新符号，代替了(22)至(28)各式的繁复演算而已．如果在某些运算中，我们需要 α_0 时(如解不定方程式等)，只要代入

$$\alpha_0=p_0-q_0\alpha_1+\alpha_2 \tag{34}$$

就可以得到．

IV．结论：现在我们根据上面的论述，提供一个解决大衍术

问题的具体运算程序如次:

A. 依据问题所给的条件,列出算式

$$\left|\frac{N}{(m_1, m_2, \cdots, m_k)} = (a_1, a_2, \cdots, a_k).\right.$$

B. 用析素因数法,将诸元数 m_i 析为

$$m_i = \prod_{s=1}^{r} p_{i_s}^{a_{i_s}} = p_{i_1}^{a_{i_1}} p_{i_2}^{a_{i_2}} \cdots p_{i_r}^{a_{i_r}} \quad (i=1, 2, \cdots, k),$$

借以确定定数 m_i'.

C. 由 $(m_i, m_j) = d$, 检验

$$a_i = nd + a_j (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

是否成立?以便确定原问题有无解答.

D. 若原问题有解,则由定数 m_i' 以确定衍母 v 和衍数 M_i.

E. 以 m_i', M_i, a_i, 用(20), (21)两式,求出最简乘率 X_i.

F. 计算各总 M_iX_i 和总数 $\sum_{i=1}^{k} M_iX_i$, 则所求的最小解答,可由

$$N = \sum_{i=1}^{k} M_iX_i \equiv N_0 \pmod{v}$$

给出之.

【注】 若按秦氏术,则 I. E. 二类,可以改述如下:以 m_i', M_i 确定 δ_i, 把 m_i', δ_i 用大衍求一术求出乘率 x_i, 然后计算各总 $M_ix_ia_i$ 和总数 $\sum_{i=1}^{k} M_ix_ia_i$, 则所求的最小解答,由

$$N = \sum_{i=1}^{k} M_ix_ia_i \equiv N_0 \pmod{v}$$

给出之.

整个过程,又可以写成如下的演表:

m_i	$=\prod p_{i_s}^{\alpha_{i_s}}$	m_i'	M_i	a_i	X_i	M_iX_i
m_1	$=\prod p_{1_s}^{\alpha_{1_s}}$	m_1'	M_1	a_1	X_1	M_1X_1
m_2	$=\prod p_{2_s}^{\alpha_{2_s}}$	m_2'	M_2	a_2	X_2	M_2X_2
…	…	…	…	…	…	…
m_k	$=\prod p_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$	m_k'	M_k	a_k	X_k	M_kX_k
$v=\prod_{i=1}^{k} m_i'$　　$N=\sum_{i=1}^{k} M_iX_i$						
$N=\sum_{i=1}^{k} M_iX_i\equiv N_0 \pmod{v}$						

第一卷　凡 四 问

1. 蓍 卦 发 微

问《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九．又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四，以象四时，三变而成爻，十有八变而成卦．欲知所衍之术及其数各几何?

答曰：衍母一十二，　衍法三．

一元衍数二十四，二元衍数一十二，

三元衍数八，　四元衍数六．

已上四位衍数，计五十．

一揲用数一十二，二揲用数二十四，

三揲用数四，　四揲用数九

已上四位用数，计四十九．

阴阳象数图

水	火	木	金
老阳	少阴	少阳	老阴

始此四数以揲，终此四者为爻

本题术曰：置诸元数，两两连环求等，约奇弗约偶，遍约毕，乃变元数，皆曰定母，列右行．各立天元一为子，列左行．以诸定母，互乘左行之子，各得，名曰衍数．次以各定母满去衍数，各余，名曰奇数．以奇数与定母，用大衍术求一，大衍求一术云：以奇于右上，定母于右下，立天元一于左上，先以右行上下两位，以少除多，所得商数，乃递互乘内左行，使右上得一而止，左上为乘率．得乘率．以乘率乘衍数，各得用数．验次所揲，余几何，以其余数，乘诸用数，并名之曰总数．满衍母去之，不满为所求数，以为实．易以三才为衍法，以法除实，所得为象数．如实有余，或一或二，皆命作一，因为象数．其象数得一，为老阳，得二，为少阴，得三，为少阳，得四，为老阴．得老阳画重爻，得少阴画拆爻，得少阳画单爻，得老阴画交爻．凡六画，乃成卦．

【新释】 这里应该首先说明，蓍草占卦，是封建社会遗留下来的一种唯心主义的产物，它的卦词，就是《易经》．至于占卜过程中的一些数据，更是唯心主义者的一套牵强附会的解释．所以本问是没有什么实践意义的．

本题先以诸元数 m_i 求出用数 $M_i\alpha_i$，次与 a_i 求

$$N=\sum_{i=1}^{4}M_i x_i a_i\equiv N_0 \quad (\mathrm{mod}.v) \qquad (\alpha)$$

又设象数为 A_i，衍法为 G，按"《易》以三才为衍法"，即 $G=3$。于是

$$A_i=\frac{N_0}{G}=\frac{N_0}{3} \qquad (\beta)$$

式中 A_i 为整数．若 $\frac{N_0}{3}$ 不能适尽，则所余 的 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$，也当作 1，并入整数部分，同为象数．其象数

$A_i=1$ 时，叫做"老阳"．画重爻"0"。

$A_i=2$ 时，叫做少阴．画拆爻"‥"。

$A_i=3$ 时，叫做少阳．画单爻"、"。

$A_i=4$ 时，叫做老阴．画交爻"×"。

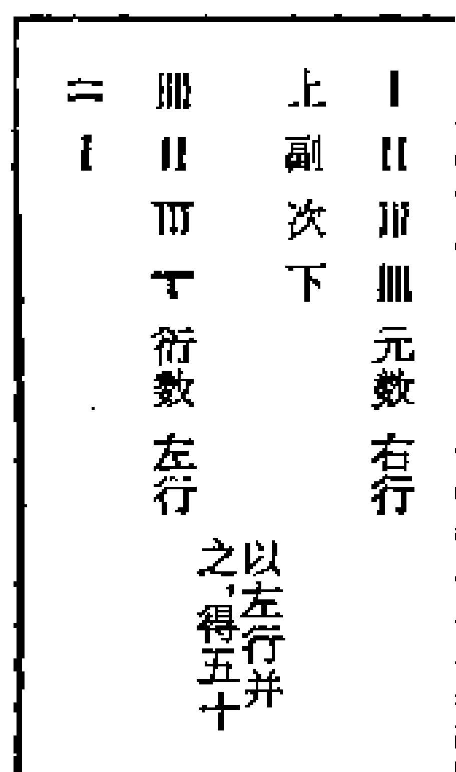
自下而上，凡六画，乃成卦．

【原草】 草曰：置一二三四，列右行．立天元一，列左行。

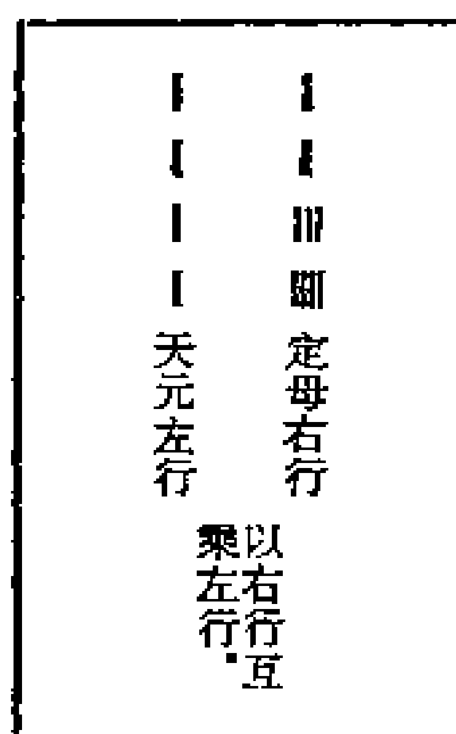
I	I
I	II
I	III
I	IIII
天元	元数
左行	右行

以右行互乘左行

以右行一二三四，互乘左行异子 1，弗乘对位本子，各得衍数。



乃并左行衍数四位，共计50，故易曰大衍之数五十．算理不可以此50为用，盖分之为二，则左右手之数，奇偶不同，见阴阳之伏数，必须复求用数，先名此曰衍数，以为限率．逐乃复以一二三四之元数，求等数，约定，按前术，以两两连环求等约之．先以1与2求等，1与3求等，1与4求等，皆得1，各约奇弗约偶，数不变．次以2与3求等，亦得1，约奇弗约偶，数亦不变．及以2与4求等，乃得2，此2只约副数2，变为1，而弗约4．次以3与4求等，亦得1，约奇，亦不变．所得一一三四，各为定数母，列右行．仍各立天元一为子，列左行．



以右行定母一一三四，互乘左行各子 1，惟不对乘本子毕．左上得 12，左副得 12，左次得 4，次下得 3，皆曰衍数．

衍数左行		定母右行	
12	上	1	上
12	副	1	副
4	次	3	次
3	下	4	下

以右行定母，满去左行衍数，余各为奇数．

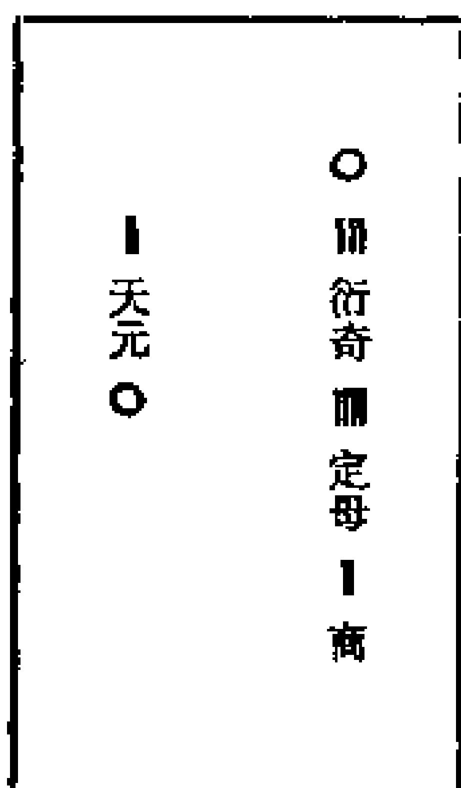
次以各母满去衍数，其上母去衍 12，奇 1；其副母 1 亦去副子 12，亦奇 1；其次母 3 去次衍 4，亦奇 1；其下母 4，欲去下子 3，则不满，便以 3 为左下奇数．

奇数左行	定母右行	
1	1	上
1	1	副
1	3	次
3	4	下

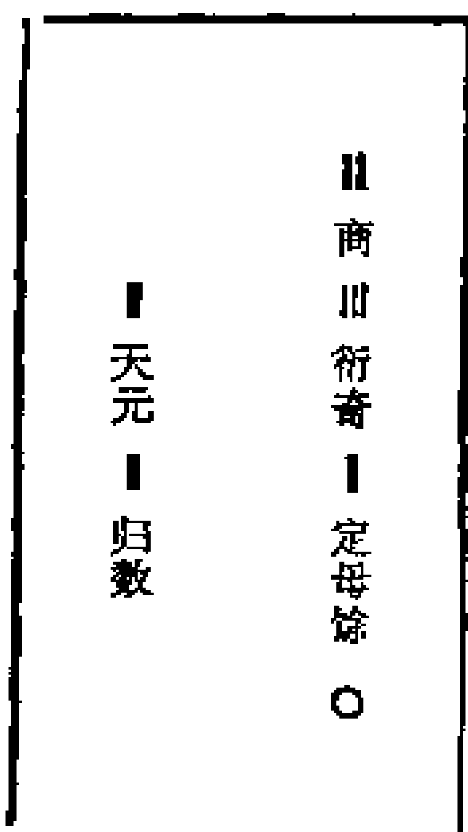
其左上副次，更不大衍，只以左下与右下衍之．

凡奇数得 1 者，便为乘率．今左下衍是 3，乃与本母 4，用大衍求一

术入之．列衍奇3于右上，定母4于右下，立天元一于左上，空其左下．



先以右上少数3，除右下多数4，得1为商．以商1，乘左上天元一，只得1，归左下．其右下余1．



次以右下少数1，除右上多数3，须使右上必奇1算乃止，遂于右行最上，商2，以除右衍，必奇1．乃以上商，命右下定余1，除之，右衍余1。

归数	天元	定母余	衍奇馀	商
|	|	|	|	|

次以商 2, 与左下归数相乘, 得 2, 加入左上天元一内, 共得 3.

左行	乘率	右行	衍奇余
|	|||	|	|

验至右上, 得一, 只以左上所得为乘率.

今验右上衍余, 得 1 当止, 乃以左上 3 为乘率. 与前三者乘率各 1, 与衍定图衍数对列之, 通计三行.

乘率	衍数	定母
|	—||	|
|	—||	|
|	||||	|||
|||	|||	||||

以乘率对乘左行毕,左上得 12, 左副得 12, 左次得 4, 左下得 9, 皆曰泛用数.

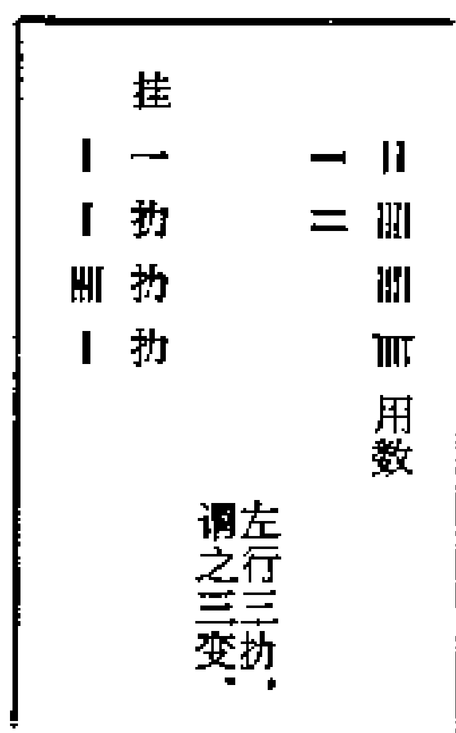
泛用		定母
𝍩𝍡	上	𝍠
𝍩𝍡	副	𝍡
𝍣	次	𝍢
𝍨	下	𝍣
		衍母 𝍩𝍡

次以右行一一三四相乘,得 12, 名曰衍母. 复推元用等数 2, 约副母 2 为 1, 今乃复归之为 2, 遂用衍母 12, 益于左副 12 内, 共为 24.

定用	元数
𝍩𝍡	𝍠
𝍪𝍣	𝍡
𝍣	𝍢
𝍨	𝍣

今验用数图,右行之一二三四, 即是所揲之数. 左行 12, 并 24, 及 4 与 9 并之,得 49, 名曰用数. 用为蓍草数, 故易曰其用四十有九是也. 假令用蓍 49, 信手分之为二,则左手奇, 右手必偶,左手偶,右手必奇,欲使蓍数近大衍 50,非 49 或 51 不可,二数信意分之,必有一奇一偶,故所以用 49, 取七七之数始者. 左副 24 扐, 益 12, 就其 37 泛为用数, 但 37 无意义, 兼蓍少太露, 是以用四十有九. 凡揲蓍求一爻之数,欲得一二三四,出于无为, 必令揲者不得知, 故以 49 蓍, 分之为二, 只用左手之数. 假令左手分得 33, 自一一揲

之，必奇1，故不繁揲，乃径挂一．故《易》曰分而为二以象两，挂一以象三．次后又令筮人以二二揲之，其33，亦奇1，故归奇于扐．又令之以三三揲之，其33，必奇3，故又归奇于扐．又令之以四四揲之，又奇1，亦归奇于扐．与前挂一，并三度揲，通有四扐，乃得一一三一．其挂一者，乘用数图左上用数12，其二揲扐1者，乘左副用数24，其三揲扐3者，乘左次用数4，得12，其四扐1者，乘左下用数9．



挂一，得12，扐1，得24，扐3，得12，又扐1，得9，并为总数．



并此四总，得57．不问所握几何，乃满衍母12去之，得不满者9，或使知其所握37，亦满衍母去之，亦只得（"得"原书误为"数"）九数．以为实．用三才衍法约之，得3．乃画少阳单爻．或不满得八得七为实，皆命作三．他皆放此．术意：谓揲二揲三揲四者，凡三度，复以33从头数揲之，故曰：三变而成爻．既卦有六爻，必一十八变，故曰：十有八变而成

卦.

【新释】　已知：$m_1=1$, $m_2=2$, $m_3=3$, $m_4=4$. 先求衍数，作为限率，以便确定用数.

天元(子)	m_i(母)	M_i
1	1	24(一元衍数)
1	2	12(二元衍数)
1	3	8(三元衍数)
1	4	6(四元衍数)
以右行互乘左行，得衍数 M_i		并上四位，得大衍之数五十.

这便是秦氏的《易》曰：大衍之数五十"的解释.

次求用数：

m_i	m_i'	M_i	δ_i	x_i	M_ix_i(泛)
1	1	12	1	1	12
2	1	12	1	1	12
3	3	4	1	1	4
4	4	3	3	3	9
$v=12$　$\sum M_ix_i=37$					

按照原术规定："并泛课衍母，多一者为正用". 则正用数应为"4+9=13". 现既有限率，应使诸用数之和近于大衍之数50. 验元泛用之和为37，乃益衍母 $v=12$ 于 m_2 所对应的泛用之内，因得定用数如次：

m_i	M_ix_i(定用)
1	12(一揲用数)
2	24(二揲用数)
3	4(三揲用数)
4	9(四揲用数)

从而
$$\sum_{i=1}^{4} M_i x_i = 49.$$
这是秦氏所谓的"其用四十有九"的来源.

"用"就是蓍草数. 入筮的方法,是令揲者(占卜人或代卜人),握蓍49枚,信手分之为二,只用左手之数,假令左手分得蓍草33枚,第一次一一揲之,必余1,即$\alpha_1=1$,故不必数揲,可径挂一. 这是"分而为二以象两,挂一以象三"的释义. 次令揲者二二揲之,又余1,即$\alpha_2=1$. 复令揲者三三揲之,余3,即$\alpha_3=3$. 四四揲之,复余1,即$\alpha_4=1$. 以α_i各乘定用得各总:12, 24, 12, 9. 因得
$$N=\sum_{i=1}^{4} M_i x_i \alpha_i = 57 \equiv 9 \pmod{12}.$$
以$N_0=9$为实,以三才衍法$G=3$除之,得3,使画少阳单爻"、"如遇有$N_0=7$或$N_0=8$时,其象数也作为3. 其它情形,仿此类推. 又设用数之和不为49而为37时,在本问中的结果是相同的.

占卦的时候,一一揲之,二二揲之,三三揲之,四四揲之,凡四度揲,所以说:"揲之以四,以象四时". 但实际上,是揲二,揲三,揲四凡三度,便可给出各余数α_i,从而得到一个卦爻. 所以说:"三变而成爻". 每卦自下而上画出六爻,以确定内外二卦,是以"十有八变而成卦". 若内卦为地,外卦为天,则所成之卦,叫做"天地否". 卦成之后,便以《易经》上相应的词句而牵强附会地以断决卜筮者的吉凶祸福. 这便是几千年来唯心主义者用以欺骗人民群众的真正面貌.

2. 古历会积

"问古历冬至以三百六十五日四分日之一,朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九,甲子六十日,各为一周. 假令至淳祐丙午十一月丙辰朔初五日庚申冬至,初九日甲子. 欲求古历气朔甲子一会,积年积月积日,及历过未至年数各几何?

答曰:一会积一万八千二百四十年,

二十二万五千六百月，

六百六十六万二千一百六十日.

历过. 九千一百六十三年，

未至. 九千七十七年.

术曰：问前置问数，有分者通之，互乘之，得通数. 求总等，不约一位，约众位，得各元法，连环求等，约奇弗约偶，各得定母. 本题欲求一会，不复乘偶. 以定相乘，为衍母，定除母，得衍数. 满定去衍，得奇. 以大衍入之，得乘率. 以乘衍数，得泛用数. 并诸泛以课衍母，如泛内多倍数者损之，乃验元数奇偶同类处，各损半倍，或三位同类者，三约衍母，损泛. 各得正用. 然后推气朔不及或所过甲子日数，乘正用，加减之，为总. 满衍去之，余为所求历过率实. 如纪元法而一，为历过. 以气元法除衍母，得一会积年. 以气周日刻乘一会年，得一会积日. 以朔元法除衍母，得一会积月数.

右本题，问气朔甲子相距日数，系开禧历推到. 或甲子日在气朔之间，及非十一月前后者，其总数必满母，赘去之，所得历过年数，尾位虽伦，首位必异. 今设问以明大衍之理，初不计其前多后少之历过.

草曰：置问数冬至 365 日 4 分日之 1，朔策 29 日 940 分日之 499，甲子 60 日，各通分内子，互乘之，列三等位，具图如后：

甲子	朔策	冬至
〇 〇 〇	日 母	母 子 母
		子

问数图

冬至得 1461，朔实得 27759，甲子无母只是 60，列三行互乘之，具图如后：

纪策 60	朔通 27759	气通 1461
	朔母 940	气母 4
纪分 225600	朔分 111036	气分 1373340
	总等 12	
	总等不约纪分	

纪元法 225600	朔元法 9253	纪元法 114445
	法元图	

以三行互乘，左得 1373340，为气分．中得 111036，为朔分．左得 225600，为纪分．先求总等，得 12．乃存纪分一位不约，只以等 12，约气分得 114445，又约朔分得 9253，皆为元法．乃以连环求等，次以纪元 225600，与朔元 9253 求等，得 1，不约．又以纪元与气元 114445 求等，得 235，只约气元，得 487．次以气元 487，与朔元 9253 求等，得 487，只约朔元 9253，得 19．约遍毕，得 487 为气定，得 19 为朔定，到 225600 为纪定．以三定相乘，得 2087476800，为衍母．具图如后：

右行	寄左行
气定 487	气衍 4286400
朔定 19	朔衍 109867200
纪定 225600	纪衍 9253
衍母 2087476800	衍数 0

各以定数约衍母，各得衍数，气得 4286400，朔得 109867200，纪得 9253，寄左行．各满定母去之，各得奇数．

右行 定数	左行 奇数
487	313
19	4
225600	9253

气奇得 313，朔奇得 4，纪奇得 9253．各与定数，用大衍求一，各得乘率，列右行．对寄左行衍数，具图如后：

右行 乘率	寄左行 衍数
473	4286400
5	109867200
172717	9253

各以大衍入之，气乘率得 473，朔乘率得 5，纪乘率得 172717，对左

行衍数．以右行乘率对乘左行衍数，气泛得 2027467200，朔泛得 549336000，纪泛得 1598150401．具图如后：

左行（原右）	右行（原左）	
4 气不及	983728800 气正用	2027467200 气泛
8 朔不及	549336000 朔正用	549336000 朔泛
0 不及数	554412001 纪正用	1598150401 纪泛
		4174953601 泛用
		2087476800 衍母

右列用数并之，共得 4174953601，为泛用数．与衍母 2087476800 验之，在衍母以上，就以衍母除泛，得 2，乃知泛内多一倍母数，当于各用内损去所多一倍．按术，验法元图内诸元数奇偶同类者，各损其半．今验法元图，气元尾数是 5，纪元尾数是 600，为俱五同类，乃以衍母 2087476800，折半得 1043738400，以损泛用图内气泛纪泛毕，其朔泛不损，各得气朔纪正用数．其气正用得 983728800，朔正用 549336000，纪正用 554412001，列为正用图在前．

既得正用数，次验问题，十一月朔日丙辰，冬至初五日庚申，初九日甲子，乃以初一减初九甲子，余 8 日为朔不及、次以初五亦减初九甲子，余 4 日为气不及、以二不及各乘正用，得数具图如后：

气总

朔总

先以气不及甲子 4 日，以乘气正用数 983728800，得 3934915200 为气总，次以朔不及甲子 8 日数，以乘其朔正用数 549336000，得 4394688000 为朔总，并之得 8329603200 为总数. 满母 2087476800 去之，不满 2067172800 为所求率实. 具图如后：

总数

衍母

所求率实　不满

纪定法

置所得率实 2067172800，如法元图纪元法 225600 而一，得 9163 年为历过年数. 次置衍母 2087476800 为实，如法元图气元 114445 为法而一，得 18240 年，为气朔甲子一会积年. 内减历过 9163 年，余 9077 年，为未至年数. 次以冬至周日 365 日 25 刻，乘一会积年 18240，得 6662160 日，为一会积日. 又以衍母为实，如法元图朔元法 9253 而一，得 225600 月. 为一会积月. 合问."

本问题问不合，术草俱误．其致误的原因，约有下列数端：

(1) "然后推气朔不及或所过甲子日数，乘正用．"在这里，秦氏只用"a_i"入算而不是应用"λa_i"(本问系通数格)，必然会导致错误的结果．

(2) 由总数术第四段的释义公式(12)中可知：$N'_0=\lambda N_0$，而历过年数应为 $\frac{N_0-a_1}{m_1}=\frac{N'_0-\lambda a_1}{\lambda m_1}$．本问原术竟以毫无理论依据的公式：

$$历过年数=\frac{N'_0}{60\lambda}=\frac{N_0}{60(纪策)},$$

即所谓"如纪元法而一，为历过"．来进行运算，也必然会给出历过年数的不合现象．

(3) "求总等，不约一位，约众位"的方法，在总数术第四段的释义中，已经谈到过，那是无法确定整化因数"λ"的．因而本问在求得的气元朔元与纪元之间，即诸问数 m_i，并不是用同一个"λ"来进行整化的．于是就产生了衍母 v 与气元 m_1 的关系，不能用

$$一会积年=\frac{v}{\lambda m_1}$$

的公式来计算．实际上，秦氏这时把纪元 m_3 增大了一个总等"12"倍，所以 v 也增大了"12"倍，或者说气元和朔元各减少了"12"倍，这样自然便导出了会积年增大"12"倍的结果．同理，会积月会积日也增大了"12"倍．

(4) "…泛内多衍母倍数者损之，乃验元数奇偶同类处，各损半倍，各得正用．…"的叙述，也是错误的(其理由见总数术第九段6的释义)．

关于本问的题问不合，早就被人们发现了．如清代道光(1821—1850)年间，沈钦裴氏曾经改正"古历会积"如下：

问．四分术：冬至 $365\frac{1}{4}$ 日，朔策 $29\frac{499}{940}$ 日，甲子 60 日，各

为一周．假令天正朔甲戌日 $\frac{410}{940}$ 日，冬至丁自日 $\frac{3}{4}$ 日．欲求气朔甲子一会，积年积月积日及历过未至年数各几何？

答曰：(1)一会积年 1520．(2)积月 18800．(3)积日 555180．(4)历过年 1115．(5)未至年 405．"

改正后 a_i 亦为分数，沈氏是直接把通数作为元数格来处理的．应用了"$\lambda=3760$"并以"λa_i"作为不及或所过数入算．同时又使 $a_1=0$，从而给出

$$\text{历过年数}=\frac{N'_0}{\lambda m_1}$$

的公式(其详细释义，请参阅李俨《大衍求一术的过去和未来》第十六节)，这样便纠正了秦氏通数格中的缺点．惟"…验元数奇偶同类处，各损半倍，…"的方法，仍然被应用着，这是美中不足的地方，尽管他的答案是完全正确的．

为了说明"古历会积"这类问题的实质，并尽量保存原文字起见，特为更正兼立术草并为释义如次：

问古历冬至以三百六十五日四分日之一，朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九，甲子六十日，各为一周．假令天正(原为"至淳祐丙午十一月")丙辰朔，初五日庚申冬至，初九日甲子．欲求古历气朔甲子一会，积年积月积日，及历过未至年数各几何？

答曰：一会积 1520 年，18800 月，555180 日．

历过 1268 年，未至 252 年．但必须是亥正末刻冬至和辰初 33 刻 72 分 $34\frac{2}{47}$ 秒 $\left(\text{按即"}8\frac{22}{235}\text{"时}\right)$交朔．

【注】古历所用日刻分秒为百进位法，即 1日 ＝100刻，1刻 ＝100分，1分 ＝100秒．

术曰：置问数，求通母(分母之最小公倍数)，以乘问数，得各元法．连环求等，约奇弗约偶，各得定母．以定相乘为衍母．以通母

除之，得一会积日．以朔元法除衍母，得一会积月．以气元法除衍母，得一会积年．然后以定除母，得衍数．满定去衍，得奇．以大衍入之，得乘率．以乘衍数，得用数．次推气朔不及或所过甲子日数，乘通母，复乘正用，加减之为总．满衍去之，余为所求历过率．加减气不及或所过甲子为实，如气元法而一，得历过年数．以减会积年，得未至年数．

【新释】 设冬至周日刻分为 m_1，朔策为 m_2，甲子为 m_3．因本问系通数格，故须先求 λ，次以 λm_i 求 m_i' 及 v，则可得

$$一会积日=\frac{v}{\lambda} \tag{α}$$

$$一会积月=\frac{v}{\lambda m_2} \tag{β}$$

$$一会积年=\frac{v}{\lambda m_1} \tag{γ}$$

次验 λm_i、λa_i 是否有解？

复次求 M_i，δ_i，x_i，M_ix_i，$M_ix_i\lambda a_i$ 以及

$$N'=\sum M_ix_i\lambda a_i\equiv N_0' \quad (\mathrm{mod}.v).$$

而

$$历过年数=\frac{N_0'\pm\lambda a_1}{\lambda m_1} \tag{δ}$$

$$未至年数=\frac{v}{\lambda m_1}-\frac{N_0'\pm\lambda a_1}{\lambda m_1} \tag{ε}$$

式中符号，气不及甲子时，用负号．甲子不及气时，用正号．

草曰：置问数，冬至 $365\frac{1}{4}$ 日，朔策 $29\frac{499}{940}$ 日，甲子 60 日．各通分内子，列三等位，具图如后：

甲子	朔策	冬至
60	29 日 499 子 940 母	365 日 1 子 4 母

问数图

冬至得 1461，朔实得 27759，甲子无母只是 60．列三行，各以通母 940 乘之，得各元法．具图如后：

纪策	朔通	气通
60	27759	1461
	940 母	4 母
	940 通母	

以通母乘通数，得各元法

纪元法	朔元法	气元法
56400	26093460	1373340

法元图

以通母乘通数，右得 343335，为气元．中得 27759，为朔元．左得 56400，为纪元．乃以连环求等，以纪元 56400 与朔元 27759 求等，得 3，只约朔元，得 9253．又以纪元与气元 343335 求等，得 705，只约气元，得 487．次以气元 487 与朔元 9253 求等，得 487，只约朔元 9253，得 19．遍约毕，得 487 为气定，得 19 为朔定，得 56400 为纪定．以三定相乘，得 521869200，为衍母，以为实．实如通母 940 而一，得 555180，为一会积日．实如朔元法 27759 而一，得 18800，为一会积月．实如气元法 343335 而一，得 1520，为一会积年数．具图如后：

会积年　会积月　会积日

气元　朔元　通母

以中行各数除衍母，各得会积

气定　朔定　纪定　衍母

寄右行	寄左行
气定	气衍
朔定	朔衍
纪定	纪衍
衍母	衍数

各以定数约衍母，各得衍数，气得 1071600，朔得 27466800，纪得 9253，寄左行．各满定数去之，各得奇数．

右行	左行
定数	奇数

气奇得 200，朔奇得 1，纪奇得 9253，各与定数，用大衍求一，各得乘率，列右行，对寄左行衍数．具图如后：

右行	寄左行
乘率	衍数

各以大衍入之，气乘率得431，朔乘率得1，纪乘率得3517，对左行衍数．以右行乘率对乘左行衍数，气泛得461859600，朔泛得27466800，纪泛得32542801．具图如后：

气泛

朔泛

纪泛

用数

衍母

气不及

朔不及

不及数

左行

气正用

朔正用

纪正用

右行

右行用数并之，共得521869201．与衍母521869200课之，多1，即为正用数，其气正用得461859600，朔正用27466800，纪正用

32542801.

既得正用数，次验问题，十一月朔日丙辰，冬至初五日庚申，初九日甲子，乃以初一减初九甲子，余 8 日，为朔不及，当知朔不及应大于或等于 7 日而小于或等于 8 日. 次以初五亦减初九甲子，余 4 日，为气不及，当知气不及应大于或等于 3 日而小于或等于 4 日，复验知当气不及 3 日朔不及 7 日 940 分日之 623 时，合于本问. 以通母 940 乘之，得 2820 分，为气不及. 得 7203 分，为朔不及. 以二不及，各乘正用，得数具图如后：

气总

朔总

先以气不及甲子 2820 分，以乘气正用数 461859600，得 1302444072000，为气总，次以朔不及甲子 7203 分，以乘其朔正用数27466800，得 197843360400，为朔总. 并之，得 1500287432400，为总数. 满母 521869200 去之，不满 435351600，为所求率. 内减气不及 2820，余 435348780，为实. 如气元法 343335 而一，得 1268，为历过年数. 以减会积年 1520，余 252，为未至年数. 但必须是亥正末刻冬至和辰初 33 刻 72 分 $34\frac{2}{47}$ 秒交朔. 合问. 具图如后：

项目	筹算数码
总数	〡☰ ○ ○ ‖ ≐ Π × ‖| = × ○ ○
衍母	‖‖ = 〡 ≐ ⊤≡ ‖ ○ ○
所求率	× ≡ ‖‖ ≡ ‖‖ 一 ⊤ ○ ○（不满）
气不及	= ⊤‖ = ○
实	× ≡ ‖‖ ≡ × ≐ Π ≐ ○
气元法	≡ × ≡ ‖| ≡ ‖‖
历过年数	一 ‖ ⊥ ⊤‖
会积年	一 ‖‖ = ○
未至年数	‖ ≣ ‖

【新释】　已知：$m_1=365\frac{1}{4}$ 日，$m_2=29\frac{499}{940}$ 日，$m_3=60$ 日；$a_1=4$ 日，$a_2=8$ 日，$a_3=0$ 日．因得演表如次：

m_i（问）	m_i（通）	λm_i	$=\Pi p_i^{\alpha_i}$	m_i'	M_i	a_i	αa_i
$365\frac{1}{4}$	$\frac{1461}{4}$	343335	$=3\cdot5\cdot47\cdot$“487”	487	1071600	4	3760
$29\frac{499}{940}$	$\frac{27759}{940}$	27759	$=3\cdot$“19”$\cdot487$	19	27466800	8	7520
60	$\frac{60}{1}$	56400	$=$“2^4”$\cdot$“3”$\cdot$“5^2”$\cdot$“47”	56400	9253	0	0
$\lambda=940$		（元法数）	$v=521869200$		$\lambda=940$		

由(α)至(γ)各式，得

$$一会积日=\frac{521869200}{940}=555180\ 日，$$

$$一会积月=\frac{521869200}{27759}=18800\ 月，$$

$$一会积年=\frac{521869200}{343335}=1520\ 年.$$

次求历过未至年数：因$(\lambda m_2,\ \lambda m_3)=(27759,\ 56400)=3$，故应有关系式

$$7520(\lambda a_2)\equiv0(\lambda a_3)\pmod{3}$$

存在．显然上式不能成立，所以当 a_1 恰为 4 日和 a_2 恰为 8 日时，本问的历过和未至年数部分无解．

但如不要求 a_1 恰为 4 日和 a_2 恰为 8 日的情形下，本问题还是可能有解的．即当

$$4\ 日\geqslant a_1\geqslant3\ 日，$$

$$8\ 日\geqslant a_2\geqslant7\ 日$$

或

$$\left.\begin{array}{l} 3760 \geqslant \lambda a_1 \geqslant 2820, \\ 75220 \geqslant \lambda a_2 \geqslant 6580 \end{array}\right\} \qquad (\text{A})$$

时，本问题可能有解而且是合理的，因为气朔不一定在日首。这里有解的先决条件，是要下面的几个关系式成立：

$$\because \quad (\lambda m_1,\ \lambda m_2) = (343335,\ 27759) = 1461,$$

$$\therefore \quad \lambda a_1 = 1461 n_1 + \lambda a_2 \qquad (\text{Б})$$

又
$$(\lambda m_2,\ \lambda m_3) = (27759,\ 56400) = 3,$$

$$\therefore \quad \lambda a_2 = 3 n_2 + \lambda a_3 \qquad (\text{B})$$

又
$$(\lambda m_3,\ \lambda m_1) = (56400,\ 343335) = 705,$$

$$\therefore \quad \lambda a_3 = 705 n_3 + \lambda a_1 \qquad (\Gamma)$$

由(A)，(Б)，(B)，(Γ)各式，极易给出下面的一组结果：即当 $n_1 = -3$，$n_2 = 2401$，$n_3 = -4$ 时，则有

$$\begin{cases} \lambda a_1 = 2820, \\ \lambda a_2 = 7203, \\ \lambda a_3 = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a_1 = 3\ \text{日}, \\ a_2 = 7\dfrac{623}{940}\ \text{日}, \\ a_3 = 0\ \text{日}. \end{cases}$$

复次由 m_i'，M_i 求出 δ_i，x_i，$M_i x_i$，$M_i x_i \lambda a_i$ 等，得演表如下：

m_i'	M_i	δ_i	x_i	$M_i x_i$	λa_i	$M_i x_i \lambda a_i$
487	1071600	200	431	461859600	2820	1302444072000
19	27466800	1	1	27466800	7203	197843360400
56400	9253	9253	3517	32542801	0	0
$v = 521869200$			$\sum M_i x_i = 521869201$		$\sum M_i x_i \lambda a_i = 1500287432400$	

从而给出

$N' = 1500287432400 \equiv 435351600 \pmod{521869200}$.

由(δ), (ε)二式，得

$$\text{历过年数} = \frac{435351600 - 2820}{343335} = \frac{435348780}{343335} = 1268 \text{ 年},$$

$$\text{未至年数} = 1520 - 1268 = 252 \text{ 年}.$$

但必须是亥正末刻冬至和辰初33刻72分$34\frac{2}{47}$秒交朔.

3. 推计土功

问筑堤起四县夫，分给里步皆同齐，阔二丈，里法三百六十步，步法五尺八寸．人夫以物力差定，甲县物力一十三万八千六百贯，乙县物力一十四万六千三百贯，丙县物力一十九万二千五百贯，丁县物力一十八万四千八百贯．每力七百七十贯，科一名，春程人功平方六十尺．先到县先给，今甲乙二县俱毕，丙县余五十一丈，丁县余一十八丈，不及一日，全功．欲知堤长及四县夫所筑各几何．

答曰：堤长一十九里二百三十五步五尺．

甲县夫筑一千二十六丈．乙丙丁同．

乙县夫筑一千七百六十八步五尺六寸．甲丙丁同．

丙县夫筑四里三百二十八步五尺六寸．甲乙丁同．

丁县夫筑．同前三县数．

术曰：置各县力，以程功乘，为实．以力率乘堤齐阔，为法除之，得各县日筑复数．有分者通之，互乘之，得通数 求总等，不约一位约众位，曰元数．连环求等，约奇，得定母．陆续求衍数奇数乘率用数．以丙丁县不及数，乘本用，并为总数．以定母相乘，为衍母．满母去总数，得各县分给里步积尺数．以县数因之，为堤长．各以里法步法约之，为里步．

【注】 本问系复数格，术草虽然应用了不甚严密的"求总等，

不约一位约众位"的方法，但却给出了正确的结果.

【新释】 解设甲县物力为 P_1，乙县物力为 P_2，丙县物力为 P_3，丁县物力为 P_4，力率为 k，则得

$$甲县应差夫=\frac{P_1}{k},$$

$$乙县应差夫=\frac{P_2}{k},$$

$$丙县应差夫=\frac{P_3}{k},$$

$$丁县应差夫=\frac{P_4}{k}.$$

又设堤阔为 b，春程人功为 c，则每夫每日筑堤长度为 $\frac{c}{b}$，于是各县每日各共筑堤长为

$$甲县日筑: m_1=\frac{P_1c}{kb} \qquad (\alpha_1)$$

$$乙县日筑: m_2=\frac{P_2c}{kb} \qquad (\alpha_2)$$

$$丙县日筑: m_3=\frac{P_3c}{kb} \qquad (\alpha_3)$$

$$丁县日筑: m_4=\frac{P_4c}{kb} \qquad (\alpha_4)$$

次由 m_i 求 m_i'，v，M_i，δ_i，x_i，M_ix_i. 复设各县不及一日全功数为 a_1，a_2，a_3，a_4，则可由 $M_ix_ia_i$ 以求各县分给里步积尺数:

$$N=\sum M_ix_ia_i\equiv N_0 \pmod{v} \qquad (\beta)$$

而堤长

$$l=4N. \qquad (\gamma)$$

【原草】 草曰：置甲县力 138600 贯，乙县力 146300 贯，丙县力 192500 贯，丁县力 184800 贯，以程功 60 尺遍乘之，皆以贯默约之，甲得 8316000 尺，乙得 8778000 尺，丙得 11550000 尺，丁得 11088000 尺，各为实. 次以力率 770 贯，乘堤齐阔 20 尺，亦以贯

默约之，得 15400 尺，为法．遍除诸各实，甲得 54 丈，乙得 57 丈，丙得 75 丈，丁得 72 丈各为四县众夫每日筑长率．按大衍术，命曰复数，列右行．

元数
16尺2寸
17尺1寸
22尺5寸
21尺6寸
右行

以复数求总等，得 3 寸，以约三位多者，不约其少者，甲得 54，乙得 19，丙得 25，丁得 24，仍为元数，次以两两连环求等，各约之．

甲	54	
乙	19	
丙	25	
丁	24	

仍元　左行

先以丁丙求等，又以丁乙求等。皆得 1，不约．次以丁甲求等，得 6，只约甲 54，得 9，不约丁．次以丙与乙求等，又以丙与甲 9 求等，皆得 1，不约　后以乙与甲 9 求等，得 1，不约．复验甲 9 与丁 24，犹可再约，又求等，得 3，以约丁 24，得 8，复甲为 27．

次以定母四位相乘，求得 102600，为衍母．各以定母约衍母，甲得 3800，乙得 5400，丙得 4104，丁得 12825．为衍数．

满定母，各去衍数，甲不满 20，乙不满 4，丙不满 4，丁不满 1，各为奇数．

以各定母，与本奇数，用大衍求一术入之，各得乘率．甲得 23，乙得 5，丙得 19，丁得 1．

寄左行 衍数	右行 乘率	
3800	23	甲
5400	5	乙
4104	19	丙
12825	1	丁

以右行乘率，对乘寄左行衍数甲得 87400，乙得 27000，丙得 77976，丁得 12825，各为用数．

87400	甲用
27000	乙用
77976	丙用
12825	丁用

次验四县所筑，有无不及零丈尺寸，今甲乙俱毕，为无．丙余 51 丈，丁余 18 丈，为有．以丙丁二县余丈，各乘丙丁二用数，其丙 51，乘丙用 77976，得 3976776 丈，为丙总．以丁余 18，乘丁用 12825，得 230850 丈，为丁总．并二总，得 4207626 丈，为总数．亦以丈通衍母，得 102600 丈，仍为衍母，满去总数，不满 1026 丈，为所求长率．以四县因之，得 4104 丈，为实．以步法 5 尺 8 寸除之，得

7075 步 5 尺，为堤积步．以里法 360 步约之，得 19 里 235 步 5 尺，为堤通长．置长率 1026 丈，以步法约之，得 1768 步 5 尺 6 寸，又以里法约之，得 4 里 328 步 5 尺 6 寸，为各县所给道里步尺数．

【新释】 已知：$P_1=138600$ 贯，$P_2=146300$ 贯，$P_3=192500$ 贯，$P_4=184800$ 贯，$k=770$ 贯，$b=20$ 尺，$c=60$ 平方尺，代入(α_4)式，得

$$m_1=\frac{138600\times 60}{770\times 20}=\frac{8316000}{15400}=540 \text{ 尺}=54 \text{ 丈}.$$

$$m_2=\frac{146300\times 60}{770\times 20}=\frac{8778000}{15400}=570 \text{ 尺}=57 \text{ 丈}.$$

$$m_3=\frac{192500\times 60}{770\times 20}=\frac{11550000}{15400}=750 \text{ 尺}=75 \text{ 丈}.$$

$$m_4=\frac{184800\times 60}{770\times 20}=\frac{11088000}{15400}=720 \text{ 尺}=72 \text{ 丈}.$$

次以 m_i 求 m'_i，v，M_i，δ_i，x'_i，M_ix_i并知 $a_1=a_2=0$，$a_3=51$ 丈，$a_4=18$ 丈．因得演表于次：

m_i	$=\prod p_{i_j}^{a_j}$	m'_i	M_i	δ_i	x_i	M_ix_i	a_i	$M_ix_ia_i$
54	$=2\cdot$"3^3"	27	3800	20	23	87400	0	0
57	$=3\cdot$"19"	19	5400	4	5	27000	0	0
75	$=3\cdot$"5^2"	25	4104	4	19	77976	51	7689767
72	$=$"2^3"$\cdot 3^2$	8	12825	1	1	12825	18	230850
$v=102600$				$\sum M_ix_ia_i=4207626$				

从而给出

$$N=4207626\equiv 1026 (\bmod. 102600).$$

即各县分给里步尺数：

$$N_0=1026 \text{ 丈}=1768 \text{ 步 } 5 \text{ 尺 } 6 \text{ 寸}$$
$$=4 \text{ 里 } 328 \text{ 步 } 5 \text{ 尺 } 6 \text{ 寸}.$$

式中里法为 360 步，步法为 5 尺 8 寸．

由(r)式，得

$$l = 4 \times 1026 \text{ 丈} = 4104 \text{ 丈} = 7075 \text{ 步 } 5 \text{ 尺}$$
$$= 19 \text{ 里 } 235 \text{ 步 } 5 \text{ 尺}.$$

4. 推库额钱

问有外邑七库，日纳息足钱适等，递年成贯整纳，近缘见钱希少，听各库照当处市陌，准解旧会．其甲库有零钱一十文，丁庚二库，各零四文，戊库零六文，余库无零钱．甲库所在市陌，一十二文，递减一文，至庚库而止．欲求诸库日息元纳足钱展省，及今纳旧会并大小月分各几何？

答曰：诸库元纳日息足钱二十六贯九百五十文，展省三十五贯文．

甲库日息旧会：二百二十四贯五百一十文，
　大月旧会：六千七百三十七贯五百文，
　小月旧会：六千五百一十二贯九百二文．
乙库日息旧会：二百四十五贯文，
　大月旧会：七千三百五十贯文，
　小月旧会：七千一百五贯文．
丙库日息旧会：二百六十九贯五百文，
　大月旧会：八千八十五贯文，
　小月旧会：七千八百一十五贯五百文．
丁库日息旧会：二百九十九贯四百四文，
　大月旧会：八千九百八十三贯三百三文，
　小月旧会：八千六百八十三贯八百八文．
戊库日息旧会：三百三十六贯八百六文，
　大月旧会：一万一百六贯二百四文，
　小月旧会：九千七百六十九贯三百六文．
己库日息旧会：三百八十五贯文，

大月旧会：一万一千五百五十贯文，

小月旧会：一万一千一百六十五贯文。

庚库日息旧会：四百四十九贯一百四文，

大月旧会：一万三千四百七十五贯文，

小月旧会：一万三千二十五贯八百二文。

术曰：同前以大衍求之，置甲库市陌，以递减数减之，各得诸库元陌。连环求等，约奇弗约偶，偶得定母，诸定相乘，为衍母。以定约衍母，得衍数。衍数同衍母者，去之为无。无者，借之同类其各满定母，去余为奇数。以奇定，用大衍求乘率，乘衍数为用数。无者则以元数同类者求等，约衍母，得数为借数。次置有零文库零钱数，乘本用数，并为总数。满衍母去之，不满为诸库日息足钱。各大小月日数乘之，各为实。各以元陌约，为旧会。

【新释】 设甲库市陌为 m_1，递减数为 d，则乙库市陌：$m_2=m_1-d$，丙库市陌：$m_3=m_1-2d=m_2-d$，丁库市陌：$m_4=m_3-d$，戊库市陌：$m_5=m_4-d$，己库市陌：$m_6=m_5-d$，庚库市陌：$m_7=m_6-d$。

次以 m_i 求 m_i'，v，M_i，δ_i，x_i 和 M_ix_i。复设诸库零钱数为 a_1，a_2，……，a_7，则可借以求得 $M_ix_ia_i$。而诸库日息足钱 N_0 为

$$N=\sum M_ix_ia_i\equiv N_0 \pmod{v} \qquad (\alpha)$$

又设官省陌为 p，则

$$展省数=\frac{N_0}{p\%} \qquad (\beta)$$

而各库日息旧会：

$$A_i=\frac{N_0}{m_i\%} \qquad (\gamma)$$

$$大月旧会=\frac{30N_0}{m_i\%} \qquad (\delta)$$

$$小月旧会=\frac{(30-1)N_0}{m_i\%} \qquad (\varepsilon)$$

【原草】 草曰：置甲库市陌 12，递减 1，得 11 为乙库陌，10 为

丙库陌，9 为丁库陌，8 为戊库陌，7 为己库陌，6 为庚库陌，得诸库元陌．

甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	
12	11	10	9	8	7	6	元陌

以连环求等，约讫，甲得 1，乙得 11，丙得 5，丁得 9，戊得 8，己得 7，庚得 1，各为定母．立各 1 为子．

右行	左行
1	1
11	1
5	1
9	1
8	1
7	1
1	1
定母	天元

互乘

先以诸定相乘，得 27720，为衍母．次以诸定互乘诸子，甲得 27720，乙得 2520，丙得 5544，丁得 3080，戊得 3465，己得 3960，庚得 27720，各为衍数．

	定母（右行）	衍数（左行）
甲	1	27720
乙	11	2520
丙	5	5544
丁	9	3080
戊	8	3465
己	7	3960
庚	1	27720

27720

次验诸衍数，有同衍母者，皆去之，为无衍数．次各满定母去各本衍，各得奇数．甲无，乙得 1，丙得 4，丁得 2，戊得 1，己得 5，庚无，各为奇数．

	定母	奇数
甲	1	0
乙	11	1
丙	5	4
丁	9	2
戊	8	1
己	7	5
庚	1	0

次验有奇数者，得 1 便以 1 为乘率．或得 2 数以上者，各以奇数于右上，定母于右下，立天元一于左上，用大衍求一之术入之，验乘除至右上余 1 而止，皆以左上所得为乘率，甲无，乙得 1，丙得 4，丁得 5，戊得 1，已得 3，庚无，各为乘率，列右行．以对寄左衍．

左行 衍数		右行 乘率
〇	甲	〇
𝍡𝍤𝍪〇	乙	𝍠
𝍭𝍤𝍬𝍣	丙	𝍣
𝍫〇𝍰〇	丁	𝍤
𝍫𝍣𝍮𝍤	戊	𝍠
𝍫𝍨𝍮〇	己	𝍢
〇	庚	〇

以两行对乘之，为用数．甲无，乙得 2520，丙得 22176，丁得 15400，戊得 3465，已得 11880，庚无．

用数	
〇	甲
𝍪𝍤𝍪〇	乙
𝍡𝍪𝍠𝍯𝍥	丙
𝍠𝍭𝍣〇〇	丁
𝍫𝍣𝍮𝍤	戊
𝍠𝍩𝍧𝍰〇	己
〇	庚

次以推无用数者，惟甲庚合于同类处借之．其同类，谓元陌列而视

之.

元陌	
甲	12
乙	11
丙	10
丁	9
戊	8
己	7
庚	6

今视甲 12, 庚 6, 皆与丙 10, 戊 8, 俱偶, 同类. 其戊用数 3465, 其数少,不可借. 唯丙 10 之用数, 系 22176, 为最多, 当以借之, 乃以甲 12, 丙 10, 庚 6 求等, 得 2. 以等数 2, 约衍母 27720, 得 13860, 为借数. 乃减丙用 22176, 余 8316, 为丙用数. 乃以所借出之数 13860 为实, 以元等 2 为法, 除之, 得 6930, 为甲用数. 以甲用数减借出数, 余亦得 6930, 为庚用数. 今不欲使甲庚之借数同, 乃验借出数 13860, 可用几约如意, 乃立 3, 取 3 分之 1, 得 4620, 为甲用. 取 3 分之 2, 得 9240, 为庚用. 列右行.

甲 乙 丙 丁 戊 己 庚

余数 用数

左行 右行

乃视诸库有无零钱数,验得乙丙己三库,无,先去其用数.乃以甲丁戊庚四库零钱,列左行,对乘本用,甲得46200,丁得61600,戊得20790,庚得36960,各为和.

甲	46200
丁	61600
戊	20790
庚	36960
	各总

并此四总,得165550,满衍母27720去之,不满26950,为所求率.以贯约为26贯950文,为诸库日息等数,以官省77陌,展得35贯文.各以其库元陌组计,各得旧会零钱.各以30日乘,为大月息.以日息减大息,余为小月息.合问.

【注】《数书九章札记》卷一所载:"…乃验借出数13860,可用几约如意,乃立3.李氏锐曰:甲丙之等2,于丙借甲,以等2约衍母为借数.甲庚之等6,于甲借庚,当以等6约衍母为借数.今甲用本为2约衍母之数,又以3约之,便是6约衍母.又庚丙之等亦为2,于甲借庚,与先借得庚用,然后于庚借甲同,故以3之1为甲用,3之2为庚用.云如意立8,虽合其数,于率不通.….”按本问借用的情形,和大衍总数术第九段释义B的精神完全相符.李锐所谓"云如意立8,于率不通"者,是把"如意"二字解释为"任意"了.实际上,秦氏的"可用几约如意",应该理解为"试看用什么数约才合适."这样便不会发生"于率不通"了.

【新释】　已知:$m_1=12$, $d=1$, $\therefore m_2=11$, $m_3=10$, $m_4=9$, $m_5=8$, $m_6=7$, $m_7=6$.并由之以求m'_i, v, M_i, δ_i, α_i, $M_i\alpha_i$等如下表:

m_i	$=\Pi p_{i_u}^{\alpha_i}$	m_i'	M_i	ε_i	x_i	M_ix_i
12	$=2^2\cdot3$	1	27720	—	—	—
11	=“11”	11	2520	1	1	2520
10	=2·“5”	5	5544	4	4	22176
9	=3·“2”	9	3080	2	5	15400
8	=2^“3”	8	3465	1	1	3465
7	=“7”	7	3960	5	3	11880
6	$=2\cdot3$	1	27720	—	—	—
$v=27720$						

由上表得知，甲庚无用数，当可向同类处借之．验与丙戊同类，但戊数少，不便借，所以只能向丙处去借．因

$$(m_1,\ m_3,\ m_7)=(12,\ 10,\ 6)=2,$$

便以 2 约衍母 v，得

$$\frac{v}{2}=13860.$$

遂以

$$22176-13860=8312$$

为丙用数．又因$(m_1,\ m_7)=(12,6)=6$，即以 3 约 $\frac{v}{2}$(亦即以 6 约 v)，因得

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{v}{2}=\frac{v}{6}=4620$$

为甲用数，以

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{v}{2}=\frac{v}{3}=9240$$

为庚用数．列表于次：

M_ix_i(泛)	M_ix_i(正)
—	4620
2520	2520
22176	8316
15400	15400
3465	3465
11880	11880
—	9240

次知：$a_1=10$, $a_2=a_3=0$, $a_4=4$, $a_5=6$, $a_6=0$, $a_7=4$. 因得总数如下：

M_ix_i	a_i	$M_ix_ia_i$
4620	10	46200
2520	0	0
8316	0	0
15400	4	61600
3465	6	20790
11880	0	0
9240	4	36960
$\sum M_ix_ia_i=165550$		

从而得到诸库日息等数

$$N=165550\equiv 26950 \pmod{27720}.$$

即 $$N_0=26\text{ 贯 }950\text{ 文}.$$

又官省陌 $p=77$, 故有

$$\text{展省数}=\frac{26950}{77\%}=35000\text{ 文}=35\text{ 贯文}.$$

由(γ), (δ), (ε)各式，得

$$\text{甲库：}A_1=\frac{26950-10}{12\%}+10=224510\text{ 文}=224\text{ 贯 }510\text{ 文},$$

大月旧会$=\dfrac{26950\times30}{12\%}=6737500$ 文$=6737$ 贯 500 文，

小月旧会$=\dfrac{26950-2}{12\%}+2=6512902$ 文$=6512$ 贯 902 文.

乙库：$A_2=\dfrac{26950}{11\%}=245000$ 文$=245$ 贯文，

大月旧会$=\dfrac{26950\times30}{11\%}=7350000$ 文$=7350$ 贯文，

小月旧会$=\dfrac{26950\times29}{11\%}=7105000$ 文$=7105$ 贯文.

丙库：$A_3=\dfrac{26950}{10\%}=269500$ 文$=269$ 贯 500 文，

大月旧会$=\dfrac{26950\times30}{10\%}=8085000$ 文$=8085$ 贯文，

小月旧会$=\dfrac{26950\times29}{10\%}=7815500$ 文$=7815$ 贯 500 文.

丁库：$A_4=\dfrac{26950-4}{9\%}+4=299404$ 文$=299$ 贯 404 文，

大月旧会$=\dfrac{26950\times30-3}{9\%}+3=8983303$ 文$=8983$ 贯 303 文，

小月旧会$=\dfrac{26950\times29-8}{9\%}+8=8683808$ 文$=8683$ 贯 808 文.

戊库：$A_5=\dfrac{26950-6}{8\%}+6=336806$ 文$=336$ 贯 806 文，

大月旧会$=\dfrac{26950\times30-4}{8\%}+4=10106204$ 文$=10106$ 贯 204 文，

小月旧会$=\dfrac{26950\times29-6}{8\%}+6=9769306$ 文$=9769$ 贯 306 文.

已库：$A_6=\dfrac{26950}{7\%}=385000$ 文$=385$ 贯文，

大月旧会$=\dfrac{26950\times30}{7\%}=11550000$ 文$=11550$ 贯文，

小月旧会$=\dfrac{26950\times29}{7\%}=11165000$ 文$=11165$ 贯文.

庚库：$A_7=\frac{26950-4}{6\%}+4=449104$ 文 $=449$ 贯 104 文，

大月旧会 $=\frac{26950\times 30}{6\%}=13475000$ 文 $=13475$ 贯文，

小月旧会 $=\frac{26950\times 29-2}{6\%}+2=13025802$ 文 $=13025$ 贯 802 文.

第二卷 凡五问

5. 分粜推原

问有上农三人，力田所收之米，系用足斗均分，各往他处出粜，甲粜与本郡官场，余三斗二升. 乙粜与安吉乡民，余七斗. 丙粜与平江揽户，余三斗. 欲知共米及三人所分各粜石数几何？

答曰：共米，七百三十八石. 三人分米，各二百四十六石.

甲粜官斛，二百九十六石.

乙粜安吉斛，二百二十三石.

丙粜平江斛，一百八十二石.

术曰：以大衍求之，置官场斛率，安吉乡斛率，平江市斛率，官私共知者，官斛八斗三升，安吉乡斛一石一斗，平江市斛一石三斗五升. 为元数. 求总等，不约一位，约众位，连环求等，约奇不约偶，或犹有类数存者，又求等，约彼必复乘此，各得定母. 相乘为衍母，互乘为衍数，满定去之，得奇，大衍求一，得乘率，乘衍数为用数，以各余米乘用，并之为总. 满衍母去之，不满为所分. 以元人数乘之，为共米.

【新释】 设官斛容量为 m_1，安吉乡斛容量为 m_2，平江市斛容量为 m_3. 甲余米数为 a_1，乙余米数为 a_2，丙余米数为 a_3. 用大衍术，求出总数 $\sum M_i\alpha_i a_i$ 后，则三人各分米数 N_0 为

$$N=\sum M_i\alpha_i a_i=N_0 \pmod{v} \qquad (\alpha)$$

而

$$共米=3N_0 \qquad (\beta)$$

又

$$各粜石数=\frac{N_0}{m_i} \tag{γ}$$

【原草】 草曰：置文思院官斛 83 升，安吉州乡斛 110 升，平江府市斛 135 升，各为其斛元率.

官斛	安吉斛	平江斛	元数
83	110	135	

先以三率求总等，得 1，不约．次以连环求等，其安吉率 110，与平江率 135，求等，得 5，以约平江率，得 27．余皆求等，得 1，不约．各得定数.

官斛	安吉	平江	定母	右行
83	110	27		

以定数相乘，得246510，为衍母．各以元率约之，得2970，为官斛衍数，得2241，为安吉斛衍数，得9130，为平江斛衍数．

官斛　安吉　平江　衍数

寄左

衍母

次以定母满去衍数，得不满65，为官斛奇．不满41，为安吉奇．不满4，为平江奇数．

官斛　安吉　平江　定母　右行

奇数　左行

定母、奇数，各以大衍入之，求得乘数．得23为官斛乘率，得51为安吉乘率，得7为平江乘率．

乘数 定母

以乘率各乘寄左行衍数，得 68310 为官斛用数，得 114291 为安吉用数，得 63910 为平江用数.

升 甲 乙 丙 余米

官斛 安吉 平江 用数

次以甲余 32 升，乘官斛用数 68310，得 2185920 升于上. 次以乙余 70 升，乘安吉用数 114291，得 8000370 升于中. 次以丙余 30 升，乘平江用数 63910，得 1917300 于下. 各为总. 并之，得 12103590 升，为总数. 满衍母 246510 升去之，不满 24600 升，为所求率. 展为 246 石，为三人各分米. 以兄弟三人因之，得 738 石为共米. 置分米 246 石，各以官斛 8 斗 3 升，安吉斛 1 石 1 斗，平江斛 1 石 3 斗 5 升，约之，甲得 296 石，余 3 斗 2 升. 乙得 223 石，余 7 斗. 丙得 182 石，余 3 斗. 各为籴过及余米. 合问.

【新释】 已知：$m_1=83$ 升，$m_2=110$ 升，$m_3=135$ 升，$a_1=32$

升, $a_2=70$ 升, $a_3=30$ 升. 因可求得 m_i', v, M_i, δ_i, x_i, $M_i x_i$ 和 $M_i x_i a_i$ 等如下表:

m_i	$=\Pi p_i^{\alpha_i}$	m_i'	M_i	δ_i	x_i	$M_i x_i$	a_i	$M_i x_i a_i$
83	="83"	83	2970	65	23	68310	32	2185920
110	="2"·"5"·110	110	2241	41	51	114291	70	8000370
135	="3³"·5	27	9130	4	7	63910	30	1917300
$v=246510$					$\sum M_i x_i a_i=12103590$			

因得各分米数 N_0 为

$$N=12103590\equiv 24600 \pmod{246510}.$$

即 $N_0=246$ 石.

由(β)式, 得

共米 $=3\times 246=738$ 石.

由(γ)式, 得

甲粜官斛 $=\dfrac{24600}{83}=296\dfrac{32}{83}$ 石 $=296$ 石余 32 升,

乙粜安吉斛 $=\dfrac{24600}{110}=223\dfrac{70}{110}$ 石 $=223$ 石余 7 斗,

丙粜平江斛 $=\dfrac{24600}{135}=182\dfrac{30}{135}$ 石 $=182$ 石余 3 斗.

6. 程 行 计 地

问军师获捷, 当早点差急足三名, 往都下节节走报. 其甲于前数日申末到, 乙后数日未正到, 丙于今日辰末到. 据供甲日行三百里, 乙日行二百四十里, 丙日行一百八十里. 问自军前至都里数, 及三人各行日数几何?

答曰: 军前至都, 三千三百里.

甲行一十一日,

乙行一十三日四时半(原书脱"半"字今据草补入),

丙行一十八日二时.

术曰:以大衍求之,置各行里,先求总等,存一约众,得元里.次以连环求等,约奇复乘偶,得定母.以定相乘,为衍母.满定除衍,得衍数.满定去衍数,得奇.奇定大衍,得乘率.以乘衍数,得用数.次置辰刻正末,乘各行里,为实.以书六时约之,得余里.各乘用数,并为总,满衍母去得所求至都里.以各日行约之,得日辰刻数.

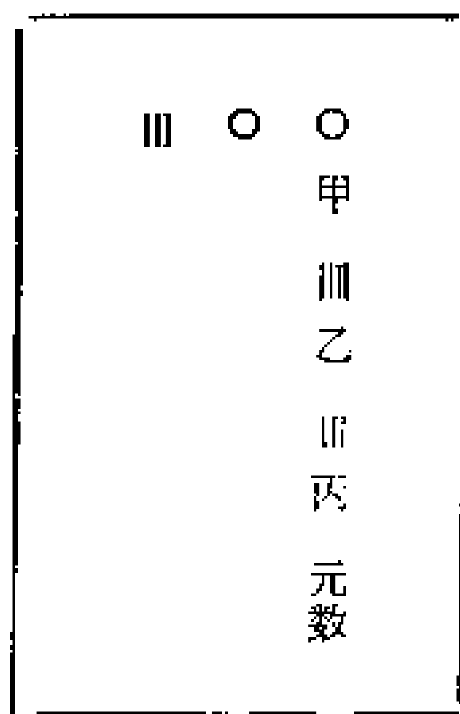
【新释】 设甲日行里为 m_1,余里为 a_1,乙日行里为 m_2,余里为 a_2,丙日行里为 m_3,余里为 a_3.用大衍术求得总数 $\sum M_i x_i a_i$ 后,则自军前至都里数 N_0 为

$$N=\sum M_i x_i a_i \equiv N_0 \pmod{v} \qquad (\alpha)$$

而各行日数

$$D_i=\frac{N_0}{m_i} \qquad (\beta)$$

【原草】 草曰:置甲 300 里,乙 240 里,丙 180 里,先求总等,得 60.只存甲 300,勿约,乃约乙 240,得 4,次约丙 180,得 3,各为元数.连环求等:



先以丙乙求等,得 1,不约.次以丙甲求等,得 3,于术约奇不约偶,

盖以等 3 约 3, 因得 1, 为奇, 虑无衍数, 乃便径先约甲 300, 为 100, 复以等 3 乘丙 3, 为 9, 既丙 9 为奇, 甲 100 为偶, 此即是约奇弗约偶. 次以乙 4 与甲 100 求等, 得 4, 以 4 约 100, 得 25, 为甲, 复以 4 乘乙 4, 得 16, 为乙, 各为定母.

甲	25
乙	16
丙	9
衍母	3600

以定母相乘, 得 3600, 为衍母. 以各定约衍母, 为衍数. 甲得 144, 乙得 225, 丙得 400.

左行 衍数	右行 定母
144	25
225	16
400	9

衍数各满定母去之, 不满为奇数. 甲得 19, 乙得 1, 丙得 4.

奇数	定母
19	25
1	16
4	9

以各奇数与定母，用大衍入之，各得乘数．甲得 4，乙得 1，丙得 7．各为乘率，列右行．

衍数 乘率

寄左 右行

以乘率对乘寄左行衍数，甲得 576，乙得 225，丙得 2800，各为用

甲

乙

丙

用数

数．次置甲申末到者，其酉初为夜，此是甲以全日到，为无余里．次置乙于未正到，乃于卯时数至未正，得 4 个半辰，以 4 半乘乙行 240 里，得 1080，为实．以书六时约之，得 180 里，为乙行不及全日之余里．次置丙于辰末到，自卯初数至辰末，得 2 时，以因丙行 180 里，得 360，为实．以六时除之，得 60 里，为丙行不及全日之余里．

甲用	乙用	丙用	余里	上	中	下	总数	衍母

以乙余 180，乘乙用 225，得 40500 于中．以丙余 60，乘丙用 2800，得 168000．加中，共得 208500，为总．满衍母 3600 去之，不满 3300 里，为军前至都里．以甲 300 除之，得 11 日．以乙 240 除之，得 13 日 4 时半．以丙 180 除之，得 18 日 2 时．合问．

【注】李氏锐曰："甲乙之等，甲丙之等，乙丙之等，皆 60．众位之等同，故 60 为总等．此存一约众后，即求续等．…此与"推计土功"的情形不同．

【新释】 已知：$m_1=300$ 里，$m_2=240$ 里，$m_3=180$ 里．$a_1=0$，$a_2=\dfrac{4\frac{1}{2}\times240}{6}=180$ 里，$a_3=\dfrac{2\times180}{6}=60$ 里．以大衍入之，因得演表如次：

m_i	$=\Pi p_{i_s}^{\gamma_s}$	m_i'	M_i	δ_i	x_i	M_ix_i	a_i	$M_ix_ia_i$
300	$=2^2\cdot3\cdot$"5^2"	25	144	19	4	576	0	0
240	$=$"2^4"$\cdot3\cdot5$	16	225	1	1	225	180	40500
180	$=2^2\cdot$"3^2"$\cdot5$	9	400	4	7	2800	60	168000
	$v=3600$			$\sum M_ix_ia_i=208500$				

从而可得自军前至都里数 N_0 为

$$N=208500\equiv3300\quad(\mathrm{mod}.3600).$$

即 $$N_0=3300\text{ 里}.$$

由(β)式，得各行日数

$$D_1=\frac{3300}{300}=11\text{ 日},$$

$$D_2=\frac{3300}{240}=13\frac{3}{4}\text{ 日}=13\text{ 日 }\frac{3}{4}\times6\text{ 时}=13\text{ 日 }4\frac{1}{2}\text{ 时},$$

$$D_3=\frac{3300}{180}=18\frac{1}{3}\text{ 日}=18\text{ 日 }\frac{1}{3}\times6\text{ 时}=18\text{ 日 }2\text{ 时}.$$

其行不及全日者，按每日行 6 时计.

7. 程行相及

问有急足三名，甲日行三百里，乙日行二百五十里，丙日行二百里．先差丙往他处下文字，既两日，又有文字遣乙追付，已半日，复有文字续令甲赶付乙．三人偶不相及，乃同时俱至彼所．先欲知乙果及丙甲果及乙得日并里，次欲知彼处去此里数各几何？

答曰：乙果追及丙，八日，行二千里．

甲果追及乙，二日半，行七百五十里．

彼处去此，三千里．

术曰：以均输求之，大衍入之．置乙已去日数，乘乙行里，为实．以甲乙行里差，为法除之，得甲及乙日数辰刻．以乘甲行，得里．

次置丙既去日，乘丙行里，为实．以丙乙行里差，为法除之，得乙及丙日数．以乘乙行，得里．然后置三人日行，求总等，约得元数．以连环求等，约得定母．以定相乘，得衍母．各定约衍，得衍数．满定去衍，得奇．奇定大衍，得乘率．以乘寄衍，得用数．视甲及乙里，为乙率．见乙及丙里，为丙率．以乙日行满去乙率，不满为乙余．以丙日行满去丙率，不满为丙余．以二余各乘本用，并之为总．满衍去之，不满为彼去此里．

【新释】 设甲日行里为 m_1，乙日行里为 m_2，丙日行里为 m_3，丙既去日数为 d_1，乙已去日数为 d_2，则得

$$乙果及丙日数=\frac{d_1m_3}{m_2-m_3} \qquad (\alpha_1)$$

$$乙果及丙行里=\frac{m_2\cdot d_1m_3}{m_2-m_3} \qquad (\beta_1)$$

$$甲果及乙日数=\frac{d_2m_2}{m_1-m_2} \qquad (\alpha_2)$$

$$甲果及乙行里=\frac{m_1\cdot d_2m_2}{m_1-m_2} \qquad (\beta_2)$$

又设甲行余里为 a_1，乙行余里为 a_2，丙行余里为 a_3，用大衍术，求得 $M_ix_ia_i$ 后，则彼处去此里数 N_0 为

$$N=\sum M_ix_ia_i\equiv N_0 \pmod{v} \qquad (\gamma)$$

【原草】 草曰：置乙已去半日，乘乙日行 250 里，得 125 里，为实．次置甲日行 300 里，减乙行 250 里，余 50 里为差法，除实．得 2 日 50 刻，为甲果及乙日数，以乘甲行 300 里，得 750，为甲及乙里数．次置丙既行 2 日，乘丙日行 200 里，得 400 里，为实．次置乙行 250 里，减丙行 200 里，余 50 里为差法，除实，得 8 日，为乙及丙日数．以乘乙行 250 里，得 2000 里，为乙行及丙之里数．已上为先欲知果及数．次列甲乙丙三名日行，求总等，得 50，先约甲丙，存乙．得甲 6，乙 250，丙 4．

丅 甲 ‖ 𝍤 〇 乙 𝍣 丙 元数

以甲 6 丙 4 求等，得 2，以 2 约甲为 3，复以 2 因丙为 8. 次将乙 250 与丙 8 相约，得 2，乃约乙，为 125，复以 2 因丙，为 16. 定得甲 3，乙 125，丙 16，为定母.

||| 甲 | = 𝍤 乙 — 丅 丙 定母

丄 〇 〇 〇 衍母

以定相乘，得 6000，为衍母. 以各定约衍母，得衍数. 甲得 2000，乙得 48，丙得 375. 求奇数：

寄左行	衍数	右行	甲 乙 丙 定母

左上 2000，以甲 3 去之，奇 2．左中 48，即为乙奇．左下 375，以丙 16 去之，奇 7．

奇数	甲 乙 丙 定母

各以大衍，求得甲 2，乙 112，丙 7，各为乘率．

衍数	甲 乙 丙 乘率

以乘率对乘衍数，甲得 4000，乙得 5376，丙得 2625，为泛用数.

泛用数	
甲	4000
乙	5376
丙	2625

并三泛，得 12001，乃多衍母 1 倍，当半衍母 6000，得 3000. 以消甲 4000，余 1000. 又消乙 5376，余 2376. 丙不消，各为定用数.

定用数	
甲	1000
乙	2376
丙	2625

既得用数，次视前草中甲及乙 750 里，为乙率，乙及丙 2000 里，为丙率，各满乙丙日行里去之.

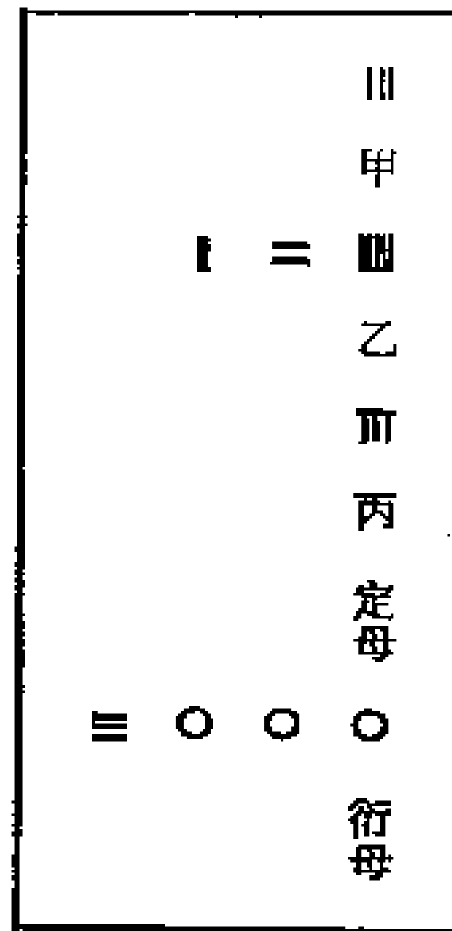
左行		右行	
乙行	250	乙率	750
丙行	200	丙率	2000

今乙丙二人所行，各皆适满，去之无余．虽称同时俱至，乃各系全日所行．便以乙丙二人约6000里，得3000里，为彼去此里数．合问．

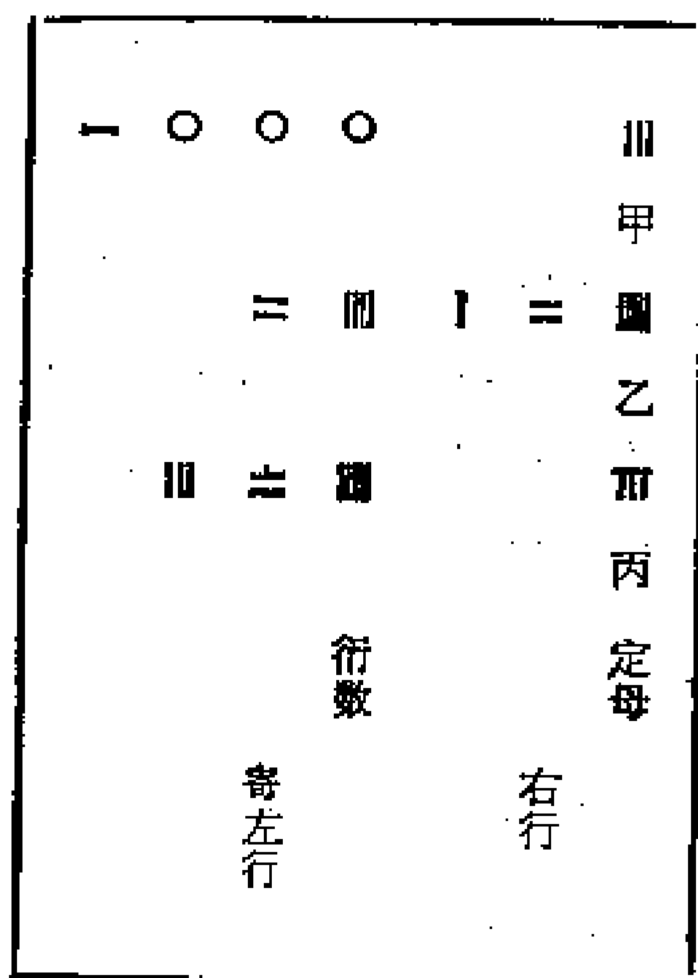
馆案云："题意谓三行迟疾不同，乙后丙二日，甲后乙半日，问几日几里可以追及．又既及之后，三人不能同行，及各至彼处之时刻，皆与各起程之时刻相同．盖言自此至彼，所行皆为整日数也"．

根据四库馆的解释，则彼处去此里数部分，便是求三行的最小公倍数问题，显然亦可应用大衍术为之．惟在原草中求定部分小有错误，乃系运用"求总等，存一约众"时不慎所致．盖以定数$m'_3=16$，并非元数$m_3=200$之约数矣．兹附改正草如次：

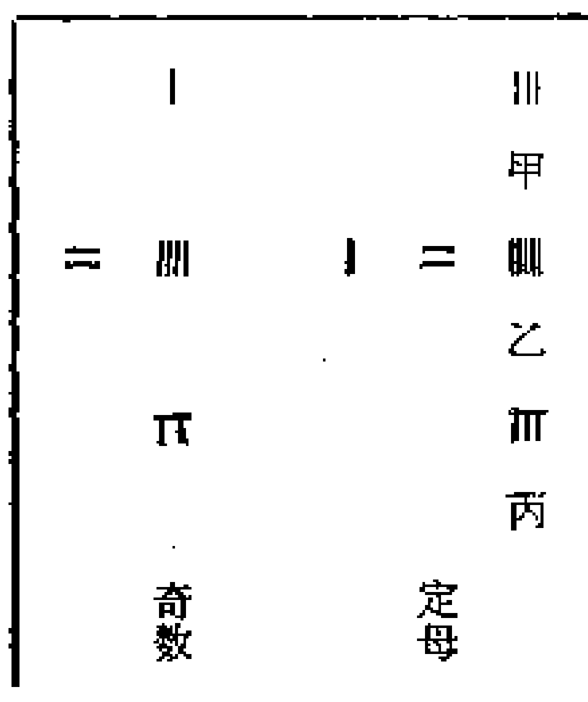
草曰：…．次列甲乙丙三名日行，用大衍术入之．



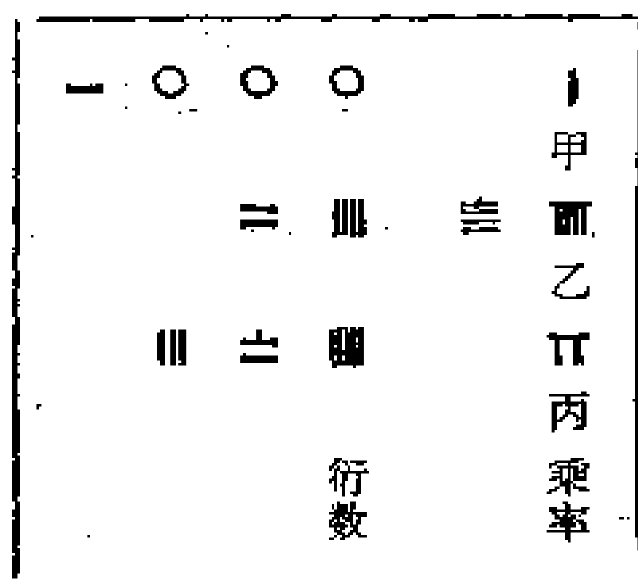
以定相乘，得 3000，为衍母．以各定约衍母，得衍数．甲得 1000，乙得 24，丙得 375。



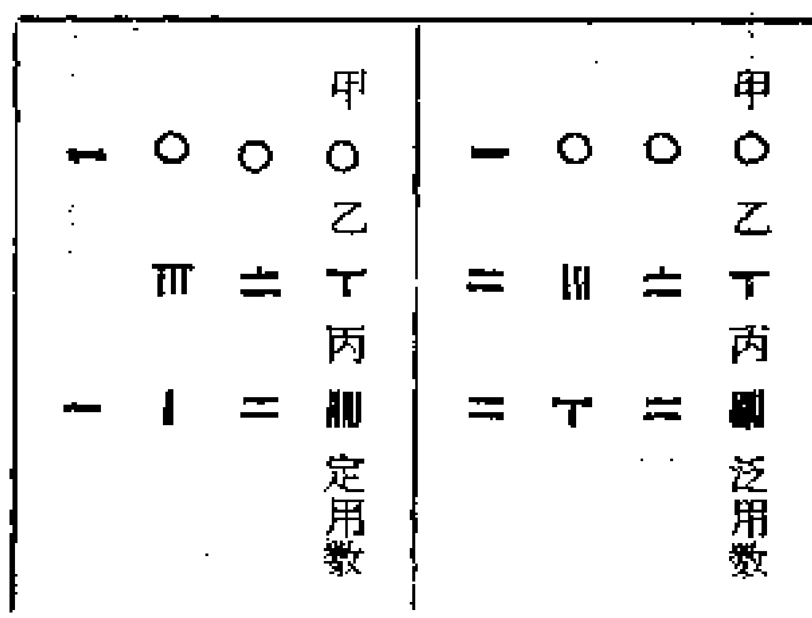
求奇数：左上 1000，以甲 3 去之，奇 1。左中 24，即为乙奇．左下 375，以丙 8 去之，奇 7。



各以大衍入之，求得甲 1，乙 99，丙 7．各为乘率．



以乘率对乘衍数，甲得 1000，乙得 2376，丙得 2625，为泛用数．并三泛，得 6001，乃多衍母一倍，当半衍母 3000，得 1500．甲不消，消乙 2376，余 876．又消丙 2625，余 1125．各为定用数．



既得用数，次视前草中甲及乙750里，为乙率．乙及丙2000里，为丙率．各满乙丙日行里去之，适满无余．既称同时俱至，乃各系全日所行，因知衍母3000，即为彼处去此里数．合问．

【新释】已知：$m_1=300$ 里，$m_2=250$ 里，$m_3=200$ 里，$d_1=2$ 日，$d_2=\frac{1}{2}$ 日，代入(α_i)，(β_i)各式，得

$$乙果及丙日数=\frac{2\times 200}{250-200}=8\ 日,$$

$$乙果及丙行里=8\times 250=2000\ 里.$$

$$甲果及乙日数=\frac{\frac{1}{2}\times 250}{300-250}=2\frac{1}{2}日,$$

$$甲果及乙行里=2\frac{1}{2}\times 300=750\ 里.$$

又知：$a_1=a_2=a_3=0$．应用 m_i以大衍入之，可得演表如下：

m_i	$=\Pi p_{i_s}^{\alpha_s}$	m_i'	M_i	δ_i	x_i	M_ix_i	a_i	$M_ix_ia_i$
300	$=2^2\cdot$“3”$\cdot 5^2$	3	1000	1	1	1000	0	0
250	$=2\cdot$“5^3”	125	24	24	99	$2376-\frac{v}{2}=876$	0	0
200	$=$“2^3”$\cdot 5^2$	8	370	7	7	$2625-\frac{v}{2}=1125$	0	0
$v=3000$						$\sum M_ix_ia_i=0$		

从而可得彼处去此里数 N_0 为

$$N=\sum M_ix_ia_i=0\equiv 3000\quad (\mathrm{mod}.3000).$$

即
$$N_0=3000\ 里.$$

【注】四库馆的案语，是值得商榷的．“三人偶不相及，乃同时俱至彼所”应该是说三人之中，没有哪两个人在中途相及，亦即皆在彼所同时相及之意．如果说在中途可以相及，而因偶然事故，

失之交臂(这里我们首先肯定三人走的是同一条道路,同时古代沿途设有驿站,追付赶付的人,到了各个驿站,是会询问一下的. 假定甲及乙,甲及丙,乙及丙三次都失之交臂,我想这是不应有的情况),这对三人偶不相及来说,尚可勉强. 如果将"同时"二字,理解为三人各有各的同时,各人起程的时刻与到达彼所的时刻都相同. 那么根据前问"程行计地"的精神,若乙丙皆卯初动身,而申末抵彼所,是亦所行皆为整日数也. 这样把"同时"解释为所行皆为整日数,殊觉费解.

因此,个人意见,原问各疑,应该有机地连系起来. 惟按原设数字,却发生了一个不可能问题. 这个不可能的产生,主要的是秦九韶氏没有掌握

$$a_i \equiv a_j \pmod{d}$$

的规律而任意设数的结果,这和"古历会积"的朔不及8日气不及4日的无解情况是相类似的. 这样一来,本问若不略改原设数字,是无法统一的. 我们只要把"既两日"改为"既一日半","已半日"改为"已一日",则全题可通,而本问入大衍之义亦显矣.

为了上述目的,特将本问改之如次,以供读者参考:

"问有急足三名,甲日行300里,乙日行250里,丙日行200里. 先差丙往他处下文字,既$1\frac{1}{2}$日,又有文字遣乙追付,已1日,复有文字续令甲赶付乙. 三人各不相及,乃同时俱至彼所. 先欲知乙果及丙甲果及乙得日并里,次欲知彼处去此里数各几何?

答曰:乙果追及丙,6日,行1500里.

　　　甲果追及乙,5日,行1500里.

　　　彼处去此1500里."

解　已知:$m_1=300$里,$m_2=250$里,$m_3=200$里. $d_1=1\frac{1}{2}$日,$d_2=1$日. 代入上述(α_i),(β_i)各式,得

$$乙果及丙日数=\frac{1\frac{1}{2}\times 200}{250-200}=6\ 日,$$

$$乙果及丙行里=6\times 250=1500\ 里.$$

$$甲果及乙日数=\frac{1\times 250}{300-250}=5\ 日,$$

$$甲果及乙行里=5\times 300=1500\ 里.$$

又知：$a_1=0$，$a_2=\left|\frac{1500}{250}=0\right.$，$a_3=\left|\frac{1500}{200}=100\right.$ 里．应用 m_i，以大衍入之，可得演表如次：

m_i	$=\Pi p_i^{\alpha_i}$	m_i'	M_i	δ_i	x_i	M_ix_i	a_i	$M_ix_ia_i$
300	$=2^2\times$"3"$\times 5^2$	3	1000	1	1	1000	0	0
250	$=2\times$"5^3"	125	24	24	99	$2376-\frac{v}{2}=876$	0	0
200	$=$"2^3"$\times 5^2$	8	375	7	7	$2625-\frac{v}{2}=1125$	100	112500
$v=3000$						$\sum M_ix_ia_i=112500$		

因得彼处去此里数 N_0：

$$N=\sum M_ix_ia_i=112500\equiv 1500 \quad (\mathrm{mod}.3000),$$

即

$$N_0=1500\ 里.$$

8．积尺寻源

问欲砌基一段，见管大小方砖六门城砖四色，令匠取便，或平或侧，只用一色砖砌，须要适足，匠以砖量地计料，称用大方料，广

多六寸，深少六寸；用小方，广多二寸，深少三寸；用城砖，长广多三寸，深少一寸；以阔深少一寸，广多三寸；以厚广多五分，深多一寸；用六门砖，长广多三寸，深多一寸；以阔广多三寸，深多一寸；以厚广多一寸，深多一寸；皆不匿匝，未免修破砖料裨补．其四色砖，大方，方一尺三寸；小方，方一尺一寸；城砖，长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分；六门，长一尺，阔五寸，厚二寸．欲知基深广几何？

答曰：深三丈七尺一寸，广一丈二尺三寸．

术曰：以大衍求之，置砖方长阔厚，为元数．以小者为单，起一，先求总等，存一位，约众位，列位多者，随意立号．乃为元数．连环求等，约为定母．以定相乘，为衍母．各定约衍母，得衍数．满定去之，得奇．奇定大衍，得乘率．以乘衍数，得用数．次置广深多少数，多者乘用，少者减元数，余以乘用，并为总．满衍母去之，不满，得广深．

【新释】 设大方尺寸为 m_1，城砖长为 m_2．小方尺寸为 m_3，六门长为 m_4，城砖阔为 m_5，六门阔为 m_6，城砖厚为 m_7，六门厚为 m_8．则可由之求得 m_i'，v，M_i，δ_i，x_i 和 M_ix_i．

次设以砖量广多少数为 a_1，a_2，$\cdots$，a_8．借以求得 $M_ix_ia_i$ 后，则基广 B 为

$$N=\sum M_ix_ia_i\equiv N_0=B \quad (\mathrm{mod}.v) \qquad (\alpha)$$

复设以砖量深多少数为 a_1'、a_2'，$\cdots$，a_8'．借以求得 $M_ix_ia_i'$ 后，则基深 H 为

$$N=\sum M_ix_ia_i'\equiv N_0=H \quad (\mathrm{mod}.v) \qquad (\beta)$$

【原草】 草曰：置四砖方长阔厚，系八数，城砖厚有分，为小者，皆通之为单．大方得 130 分，小方得 110 分，城砖长得 120 分，阔得 60 分，厚得 25 分，六门砖长得 100 分，阔得 50 分，厚得 20 分．

	尺	寸	分	
金	丨	≡	〇	大方
石	丨	=	〇	城砖长
丝	丨	一	〇	小方
竹	丨	〇	〇	六门长
匏		⊥	〇	城砖阔
土		☰	〇	六门阔
革		=	‖‖‖	城砖厚
木		=	〇	六门厚
		问数		

锥行置之右列．位稍多，砖名相互，今假八音为号位．先以最少者，自木 20，与革 25 求等，得 5，乃反约木 20，为 4．木 4 与土 50 求等，得 2，以约 50，为 25．木 4 与匏 60 求等，得 4，约 60，为 15．木 4 与 100 求等，得 4，约 100，为 25．木 4 与丝 110 求等，得 2，约 110，为 55．木 4 与石 120 求等，得 4，反约木 4 为 1．以木 1 与金 130 求等，得 1，不约．为木与诸数求等，约讫，为一变．得数具图如后：

筹	
𝍠𝍫〇	金
𝍠𝍪〇	石
𝍭𝍤	丝
𝍪𝍤	竹
𝍩𝍤	匏
𝍪𝍤	土
𝍪𝍤	革
𝍠	木

次以革 25 与土 25(原为"50"求等, 得 25, 约土 25(原为"50"), 为 1 为原("2"). 以革 25 与匏 15 求等, 得 5, 约匏 15, 为 3. 以革 25 与竹 25 求等, 得 25, 约竹 25, 为 1. 又以革 25 与丝 55 求等, 得 5, 约丝 55, 得 11. 以革 25 与石 120 求等, 得 5, 约 120, 为 24. 以革 25 与金 130 求等, 得 5, 约金 130, 得 26. 革与诸数遍约讫, 为二变. 具图如后:

筹	
𝍪𝍥	金
𝍪𝍣	石
𝍩𝍠	丝
𝍩	竹
𝍢	匏
𝍠	土
𝍩𝍤	革
𝍠	木

乃以土 1 与匏 3 竹 1 丝 11 石 24 金 26 求等, 皆得 1, 不约. 土与诸数约讫, 为三变(原为"乃以土 2 与匏 3 竹 1 丝 11 求等, 皆得 1, 不约. 以土 2 与石 24 求等, 得 2, 反约土 2, 得 1. 又以土 1 与金

26 求等，得 1，不约．土与诸数约讫，为三变．具图如后："并附图如上图)、乃以匏 3 与竹 1 丝 11 求等，皆得 1．又以匏 3 与石 24 求等，得 3，约石 24，为 8．又匏 3 与金 26 求等，得 1，匏与诸数约讫，以为四变．次以竹 1 与丝 11，与石 8 (原为"24")，与金 26 求等，皆得 1，竹与诸数约讫，为五变．次以丝 11 与石 8(原为"24")金 26 求等，皆得 1，为六变．后以石 8(原为"24")与金 26 求等，得 2，约金 26，为 13，至此七变．连环求等，约俱毕，得数为定母．列图如后：

	定母
金	13
石	8
丝	11
竹	1
匏	3
土	1
革	25
木	1

右定母列右行，以相乘，得 85800，为衍母．以各定母约衍母，各得衍数．其竹木土定得 1 者，为无．

定母 金石丝竹匏土革木 右行 衍数 左行 衍母

金定13，得衍数6600．石定8，得衍数10725．丝定11，得衍数7800．竹定1，无衍数．匏定3，得衍数28600．土定1，无衍数．革定25，得衍数3432．木定1，无衍数．各满定母去之，得奇数．

奇数		定母
9	金	13
5	石	8
1	丝	11
0	竹	1
1	匏	3
0	土	1
7	革	25
0	木	1

金得奇9，石得奇5，丝得奇1，匏得奇1，革得奇7．其丝匏得奇数1者，便以1为乘率．其金石革三处奇数，皆与本定母，用大衍求一入之，各得乘率．列右行：

衍数寄左		右行
6600	金	9
10725	石	5
7800	丝	1
0	竹	0
28600	匏	1
0	土	0
3432	革	17
0	木	0

金得3，石得5，丝得1，匏得1，革得18，各为乘率．对乘寄左行衍数，各得为用数．

	用数
金	𝍠𝍰𝍢〇〇
石	𝍣𝍫𝍥𝍪𝍣
丝	𝍯𝍧〇〇
竹	〇
匏	𝍡𝍰𝍥〇〇
土	〇
革	𝍥𝍩𝍦𝍯𝍥
木	〇
衍母	𝍧𝍭𝍧〇〇

凡诸用数同类者，数必多，可互借以补无者．先验革元数25，与木元数20，为同类，求等，得5，以等5约衍母85800，得17160．乃于革用数内减出以补木位，为木用．余44616，为革用．次验竹元数100，与土50，俱与革25同类，以求等，得25，以等25，约衍母85800，得3432．亦于革用内各借与竹土为用数．革止余37752为用（“次验竹元数…．革止用37752为用”．一段，原为“次验竹元数100，与土50，为同类．以求等，得50，以得50，约衍母85800，得1716．亦于革用内各借与竹土为用数．革止余41184为用”）．得诸定用数．

【注】 李氏锐曰：“…竹土同类求等，约衍母，于革内各借与竹土，其数虽合，于率不通．”批评甚当．

金	丨	[illegible]	[illegible]	〇	〇
石	[illegible]	[illegible]	丅	二	[illegible]
丝		[illegible]	[illegible]	〇	〇
竹		[illegible]	[illegible]	[illegible]	〢
匏	〢	[illegible]	丅	〇	〇
土		[illegible]	[illegible]	[illegible]	〢
革	〣	[illegible]	[illegible]	[illegible]	〢
木	丨	[illegible]	丨	丄	〇
					正用數

右行定用，始列锥行假号求得．今照砖色，迂次列之：

左行			右行					
丄	〇	大方	金	丨	[illegible]	[illegible]	〇	〇
二	〇	小方	丝		[illegible]	[illegible]	〇	〇
[illegible]	〇	城砖长	石	[illegible]	[illegible]	丅	二	[illegible]
三	〇	城砖阔	匏	〢	[illegible]	丅	〇	〇
	■	城砖厚	革	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	〢
[illegible]	〇	六门长	竹		[illegible]	[illegible]	[illegible]	〢
[illegible]	〇	六门阔	土		[illegible]	[illegible]	三	〢
一	〇	六门厚	木	丨	[illegible]	丨	[illegible]	〇
								正用

既照砖次序，列用数于右行．乃验问题所谓大方砖砌广多 6 寸，小方多 2 寸，城砖长多 3 寸，城砖阔多 3 寸，厚多 5 分，六门长多 3 寸阔多 3 寸，厚多 1 寸．对本用列左行，各对乘之，具图如后：

金	𝍠	𝍩	𝍧	𝍰	〇	〇	〇
丝		𝍩	𝍤	𝍮	〇	〇	〇
石	𝍠	𝍮	〇	𝍰	𝍦	𝍭	〇
匏		𝍰	𝍤	𝍰	〇	〇	〇
革		𝍩	𝍧	𝍰	𝍦	𝍮	〇
竹		𝍩	〇	𝍪	𝍨	𝍮	〇
土		𝍩	〇	𝍪	𝍨	𝍮	〇
木		𝍩	𝍦	𝍩	𝍥	〇	〇

两行乘毕，金得 1188000，丝得 156000，石得 1608750，匏得 858000，革得 188760（原为“205920”），竹得 102960（原为“51480”），土亦得 102960（原为“51480”），木得 171600．乃并前八位数，共得 4377030 分（原为“4291230 分”），为总．满衍母 85800 去之，不满 1230 分，约之为 1 丈 2 尺 3 寸，为基元广数．乃求其深．验问题，大方砌少 6 寸，小方砌少 3 寸，城砖长砌少 1 寸，阔砌少 1 寸，厚砌多 1 寸，六门长砌多 1 寸，六门阔砌多 1 寸，厚砌多 1 寸，列为中行．次置诸砖元数，列为左行，课减之，具图如后：

|	≡	〇	金	少	丄	〇	大方
|	一	〇	丝	少	≡	〇	小方
|	=	〇	石	少	一	〇	城砖长
	丄	〇	匏	少	一	〇	城砖阔
	≟	Ⅲ	革	多	一	〇	城砖厚
|	〇	〇	竹	多	一	〇	六门长
	☰	〇	土	多	一	〇	六门阔
	=	〇	木	多	≟	〇	六门厚

今以中行多者存之，少者用减左行，存者左行元数去之，所减者左行余数存之．金得70，丝得80，石得110，匏得50，革得10，竹10，土10，木10，具图如后：

余		≟	〇		〇
余					〇
余	|	一	〇		〇
余		☰	〇		〇
			〇	一	〇 多
			〇	一	〇 多
			〇	一	〇 多
			〇	一	〇 多
		左行		中行	

列为左行，以对右行定用数．具图如后：

多余数		正用数
70	金	19800
80	丝	7800
110	石	53625
50	鉋	28600
10	革	37752
10	竹	3432
10	土	
10	木	17160

以左行多余数，对乘右行用数，金得 1386000，丝得 624000，石得 6898750，鉋得 1430000，革得 377520（原为“411840”），竹得 34320（原为“17160”），土得 34320（原为“17160”），木得 171600．具图如后：

金	1386000
丝	624000
石	6898750
鉋	1430000
革	377520
竹	34320
土	34320
木	171600
总数	8956510
衍母	89800

并八位，得 9956510 分，为总．满衍母 85800 去之，不满 3710 分，展为 3 丈 7 尺 1 寸，为基地深．

【新释】　已知：$m_1=130$，$m_2=1120$，$m_3=110$，$m_4=100$，$m_5=60$，$m_6=50$，$m_7=25$，$m_8=20$．先求 m_i'，v，M_i，δ_i，x_i 和 M_ix_i 等如下表：

m_i	$=\prod p_{i_s}^{\alpha_s}$	m_i'	M_i
m_1:130	$=2\cdot5\cdot$"13"	13	6600
m_2:120	$=$"2^3"$\cdot3\cdot5$	8	10725
m_3:110	$=2\cdot5\cdot$"11"	11	7800
m_4:100	$=2^2\cdot5^2$	1	—
m_5:60	$=2^2\cdot$"3"$\cdot5$	3	28600
m_6:50	$=2\cdot5^2$	1	—
m_7:25	$=$"5^2"	25	3432
m_8:20	$=2^2\cdot5$	1	—
$v=85800$			

δ_i	x_i	M_ix_i(泛)	M_ix_i(正用)
9	3	19800	19800
5	5	53625	53625
1	1	7800	7800
—	—	—	$\frac{v}{25}=3432$
1	1	28600	28600
—	—	—	$\frac{v}{25}=3432$
7	18	61776	$61776-\frac{2v}{25}-\frac{v}{5}=37752$
—	—	—	$\frac{v}{5}=17165$

次求基广 B，已知：$a_1=60$，$a_2=30$，$a_3=20$，$a_4=30$，$a_5=30$，$a_6=30$，$a_7=5$，$a_8=10$. 因得

m_i	M_ix_i	a_i	$M_ix_ia_i$
m_1:130	19800	60	1188000
m_3:110	7800	20	156000
m_2:120	53625	30	1608750
m_5:60	28600	30	858000
m_7:25	37752	5	188760
m_4:100	3432	30	102960
m_6:50	3432	30	102960
m_8:20	17160	10	171600
$\sum M_ix_ia_i=4377030$			

从而可得

$$N=4377030\equiv1230 \pmod{85800}$$

即 $B=1230$ 分$=1$ 丈 2 尺 3 寸.

复次求基深 H：已知 $a_1'=130-60=70$，$a_2'=120-10=110$，$a_3'=110-30=80$，$a_4'=10$，$a_5'=60-10=50$，$a_6'=10$，$a_7'=10$，$a_8'=10$. 因得

m_i	M_ix_i	a_i'	$M_ix_ia_i'$
m_1:130	19800	70	1386000
m_3:110	7800	80	624000
m_2:120	53625	110	5898750
m_5:60	28600	50	1430000
m_7:25	37752	10	377520
m_4:100	3432	10	34320
m_6:50	3432	10	34320
m_8:20	17160	10	171600
$\sum M_ix_ia_i'=9956510$			

从而得到

$$N=9956510\equiv3710 \pmod{85800},$$

即　　　　$H=3710$ 分 $=3$ 丈 7 尺 1 寸.

9. 余 米 推 数

问有米铺，诉被盗去米一般三箩，皆适满，不记细数. 今左壁箩剩一合，中间箩剩一升四合，右壁箩剩一合. 后获贼，系甲乙丙三名. 甲称当夜摸得马杓，在左壁箩，满舀入布袋；乙称踢着木履，在中箩舀入袋；丙称摸得漆碗，在右边箩，舀入袋. 将归食用，日久不知数. 索到三器，马杓满容一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合. 欲知所失米数，计赃结断三盗各几何？

答曰：共失米九石五斗六升三合.

甲米三石一斗九升二合，

乙米三石一斗七升九合.

丙米三石一斗九升二合.

术曰：以大衍求之. 列三器所容，为元数. 连环求等，约为定母. 以相乘，为衍母. 以定各约衍母，得衍数. 各满定母去之，得奇. 以奇定，用大衍，求得乘率. 以乘衍数，得用数. 次以各剩米乘用，并之，为总. 满衍母去之，不满为每箩米. 各以剩米减之，余为甲乙丙盗米，并之为共失米.

【新释】　设马杓容量为 m_1，木履容量为 m_2，漆碗容量为 m_3，左箩剩米为 a_1，中箩剩米为 a_2，右箩剩米为 a_3，用大衍术，求得总数后，则每箩米数 N_0 为

$$N=\sum M_i x_i a_i\equiv N_0 \pmod{v}.$$

而

$$甲盗米=N_0-a_1 \qquad (\alpha_1)$$

$$乙盗米=N_0-a_2 \qquad (\alpha_2)$$

$$丙盗米=N_0-a_3 \qquad (\alpha_3)$$

$$共失米=3N_0-(a_1+a_2+a_3) \qquad (\beta)$$

【原草】 草曰：列三器所容，1升9合，1升7合，1升2合，为元数．连环求等，皆得1，不约．便以元数相乘，得3876，为衍母．以各元数为定母，以定约衍母，得衍数．甲得204，乙得228，丙得323，各为衍数，列左行．以三定母，甲19，乙17，丙12，列右行．具图如后：

衍数左行	定数右行（升　合）	
204	1　9	甲
228	1　7	乙
323	1　2	丙
3876 衍母		

各满定母，去衍数，得奇数．甲得14，乙得7，丙得11．

奇数	定母	
14	19	甲
7	17	乙
11	12	丙

各以奇定，用大衍求一，各得乘率．甲得 15，乙得 5，丙得 11，各为乘率，列右行．对寄左行衍数，具图如后：

	衍数	乘率
甲	204	15
乙	228	5
丙	323	11

以两行对乘之，得用数．甲得 3060，乙得 1140，丙得 3553，列右行．具图如后：

	左行		右行
		余米	用数
甲	左箩	1	3060
乙	中箩	14	1140
丙	右箩	1	3553

既得用数，始验问题三箩剩米，列左行．对三人所用，以两行对乘之，甲得 3060，乙得 15960，丙得 3553。

数	名
3060	甲总
15860	乙总
3653	丙总
22573	总数
3876	衍母
合 3193	不满

并三数，得 22573，为总数，满衍母 3876 去之，不满 3193 合，展为 3 石 1 斗 9 升 3 合，为三箩适满细数．以左箩剩 1 合减之，余 3 石 1 斗 9 升 2 合，为甲盗米，又为丙盗米．以中箩剩米 1 升 4 合减之，余 3 石 1 斗 7 升 9 合，为乙盗米．并三人米，共得 9 石 5 斗 6 升 3 合，为所失米．合问．

【新释】 已知：$m_1=19$，$m_2=17$，$m_3=12$，$a_1=1$，$a_2=14$，$a_3=1$．以大衍术入之，因得演表如次：

m_i	M_i	δ_i	x_i	M_ix_i	a_i	$M_ix_ia_i$
19	204	14	15	3060	1	3060
17	228	7	5	1140	14	15960
12	323	11	11	3553	1	3553
		$v=3876$		$\sum M_ix_ia_i=22573$		

从而可得每箩米数 N_0 为

$$N=22573\equiv3193 \quad (\mathrm{mod}.3876).$$

由(α_i)各式，得

甲盗米 $=3193-1=3192$ 合 $=3$ 石 1 斗 9 升 2 合，

乙盗米 $=3193-14=3179$ 合 $=3$ 石 1 斗 7 升 9 合

丙盗米 $=3193-1=3192$ 合 $=3$ 石 1 斗 9 升 2 合.

由(β)式，得

共失米 $=3\times3193-(1+14+1)$

$=9563$ 合 $=9$ 石 5 斗 6 升 3 合.

第二章 天时类

本章前三问，系有关我国古代的历法问题．尤以第12问"治历演纪"，把历法上的主要问题如日月合宿，回归年，纪积年，置闰推气以及调日法等，都给出了言简意赅的叙述，从而可以窥见古人治历的大概情况．

在"缀术推星"一问中，秦氏把岁星的视运动，看成了匀变速运动，即具有一阶等差的运动函数．并应用了《张邱建算经》中等差级数的求第 n 项及求前 n 项之和的公式：

$$u_n = u_0 + (n-1)d_1 \tag{α}$$

$$S_n = nu_0 + \frac{n(n-1)}{2}d_1 \tag{β}$$

而平均速度：

$$\bar{u} = \frac{S_n}{n} = u_0 + \frac{n-1}{2}d_1$$

$$= \frac{u_0}{2} + \frac{u_0+(n-1)d_1}{2} = \frac{u_0+u_n}{2} \tag{γ}$$

"天池测雨"和"圆罂测雨"二问中，应用了《九章算术》所给出的圆锥台体积公式：

$$v = \frac{1}{12}\pi(d_1^2 + d_2^2 + d_1d_2)h \tag{δ}$$

和圆柱体体积公式：

$$v = \frac{1}{4}\pi d^2h \tag{ε}$$

"揆日究微"一问，是用一些实测数字，说明了经验方程的应用，从而给出了一些具有相当准确度的经验常数．

"竹器验雪"一问，秦氏采用了一个近似值方程

$$\left[\frac{(D_1-D_2)h}{2}\right]^2 x^4-h^3\left\{h^2H^2+\left[\frac{(D_1-D_2)h}{2}\right]^2\right\}=0 \quad (\zeta)$$

(ζ)式的理论依据，无由推得，且原问称"箩体通风，受雪多，则平地少"．如此则箩篾的粗细和篾缝的大小，以及风向和风的级别都有关系，所以(ζ)式的来源，可能是用少数竹箩实验的结果，不能作为一般的情形．怪不得沈钦裴氏评之为"此术于率不通"了．

第三卷　凡　四　问

10. 推 气 治 历

问太史测验无道．庆元四年戊午岁冬至三十九日九十二刻四十五分，绍定三年庚寅岁冬至三十二日九十四刻一十二分．欲求中间嘉泰甲子岁气骨岁余斗分各得几何？

答曰：气骨，十一日三十八刻二十分八十一秒八十小分．

岁余，五日二十四刻二十九分三十秒三十小分．

斗分，空日二十四刻二十九分三十秒三十小分．

术曰：先距前后年数，为法．置前测日刻分，减后测日刻分，余为率．不足减，则加纪策．以纪策累加之，令及天道，合用五日以上数，为实．以法除实，得岁余．去全日，余为斗分．以所求中间年，上距前测年数，乘岁余，益入前测日刻分，满纪策去之，余为所求年气骨．

【新释】　设前后测相距年数为 n，前测日刻分为a_1，后测日刻分为 a_2，则岁余(须为五日以上数)：

$$R=\frac{a_2+60k-a_1}{n} \quad (\alpha)$$

式中 k 为零或正整数．

$$斗分=R-5 \quad (\beta)$$

又设中间年上距前测年数为 m，则所求中间年

$$气骨=\left|\frac{a_1+mR}{60}\right. \qquad (\gamma)$$

【原草】草曰：置前测戊午岁距后测庚寅岁（馆案："绍定三年之冬至，实绍定四年辛卯之始。辛卯距戊午34年，积年33"），得33为法. 置前测戊午岁冬至39日日辰癸卯92刻45分，减后测绍定三年庚寅岁冬至32日日辰丙申94刻12分. 今后测者少不及前测者以减，乃加纪法60日于后测日内，得92日94刻12分. 然后用前测者减之，余53日1刻67分，为率. 按术，当以法33除率，须使商数必得5日以上乃可. 今率未得5日，乃两度累加纪法120，入率内，共得173日1刻67分，为实. 实如法除之，得5日24刻29分30秒30小分，不尽，弃之. 为岁余. 乃去全5日，得24刻29分30秒30小分，为斗分. 次推嘉泰甲子上距庆元戊午岁，得6，以乘岁余5日24刻29分30秒30小分，得31日45刻75分81秒80小分，益入前测戊午岁39日92刻45分，得71日38刻20分81秒80小分，满纪法60去之，余11日38刻20分81秒80小分，为所求甲子年气骨之数. 合问.

【新释】 已知：$n=33$ 年，$a_1=39.9245$ 日，$a_2=32.9412$ 日，由(α)式，且易察知 $k=3$，因得

$$R=\frac{32.9412+60\times3-39.9245}{33}$$

$$=\frac{173.0167}{33}$$

$$=5.24293030\ 日$$

$=5$日24刻29分30秒30小分.

由(β)式，得

$$斗分=5.24293030-5=0.24293030\ 日$$

$=$零日24刻29分30秒30小分.

又知：$m=6$，代入(γ)式，得中间年

$$气骨=\left|\frac{39.9245+6\times5.24293030}{60}\right.$$

$$=\left|\frac{71.38208180}{60}\right.$$

$=11.38208180$ 日 $=11$ 日38 刻 20 分 81 秒 80小分.

【注 1】 沈钦裴氏发现本问与次二问所求甲子岁气骨之数不合，疑其有误，曾作改推工作.

【注 2】 毛氏岳生曰：授时历议云：统天历庆元五年己未，杨忠辅造行，八年至开禧丁卯，先天六刻．道古此问，戊午岁冬至日分，较开禧历所推，适先六刻，盖由当时实测天道如此，非有误也.

11. 治历推闰

问开禧历，以嘉泰四年甲子岁天正冬至为一十一日日辰乙亥四十四刻六十一分五十四秒，十一月经朔一日日辰乙丑七十五刻五十五分六十二秒，问闰骨闰率各几何？

答曰：闰骨，九日六十九刻五分九十一秒．不尽一百六十九分秒之一百二十一.

闰骨率，十六万三千七百七十一.

术曰：以日法各通气朔日刻分秒，各为气骨朔骨分．其气骨分，如约率而一，约尽者为可用．或收弃余分在一刻以下者亦可用 然后与朔骨分相减，余为闰骨率．以日法约之，为闰骨策.

【新释】 设日法为 S，约率为 g，气骨为 a_1，朔骨为 a_2，按开禧历，其 $\frac{Sa_1}{g}$ 历为整数(或收弃余分在一刻以下)时为可用．因得

$$闰骨率=Sa_1-Sa_2 \qquad (\alpha)$$

$$闰骨策=\frac{Sa_1-Sa_2}{S} \qquad (\beta)$$

【原草】草曰：置本历日法 16900，先通冬至 11 日 44 刻 61 分

54 秒，得 193440 分 26 小分，为实．其历约率，系 3120，以约之，得 62，可用，其实余小分 26，乃弃之，只用 193440，为气骨分．次置朔 1 日 75 刻 55 分 62 秒，以本历日法 16900 乘之，得 29668 分 99 秒 78 小分，将近 1 分，故于气骨内所弃 26 小分，借 22 小分，以补朔内，收上，得 29669，为朔骨．然后以朔骨分减气骨分，余有163771，为闰骨率．复以日法除之，得闰骨策 9 日 69 刻 5 分 91 秒，不尽 121 算，直命之为 169 分秒之 121，合问．

【新释】：已知：开禧历：$S=16900$，$g=3120$，又嘉泰甲子岁气骨：$\alpha_1=11.446154$，朔骨：$\alpha_2=1.755562$，且

$$\frac{S\alpha_1}{g}=\frac{16900\times 11.446154}{3120}\doteq 62,$$

为可用．因得

$$\begin{aligned}闰骨率&=16900\times 11.446154-16900\times 1.755562\\&=193440-29669=163771,\end{aligned}$$

$$闰骨策=\frac{163771}{16900}=9.690591\ 日,$$

$$不尽\ \frac{121}{169}\ 秒.$$

12. 治历演纪

问开禧历，积年七百八十四万八千一百八十三，欲知推演之原，调日法，求朔余，朔率，斗分，岁率，岁闰，入元岁，入闰，朔定骨，闰泛骨，闰缩，纪率，气元率，元闰，元数，及气等率，因率，蔀率，朔等数，因数，蔀数，朔积年，二十三事，各几何？

答曰：	（新释符号）	（次序记号）
日法，一万六千九百．	S	[1]
朔余，八千九百六十七．	ϕ	[2]
朔率，四十九万九千六十七．	M	[3]
斗分，四千一百八．	R	[4]

岁率，六百一十七万二千六百八. N [5]
岁闰，一十八万三千八百四. K_1 [6]
入元岁，九千一百八十. G [7]
入闰，四十七万四千二百六十. K_2 [8]
朔定骨，二万九千六百六十九. a_2 [9]
闰泛骨，一十六万三千七百七十一. a_3 [10]
闰缩，一十八万八千五百七十八. Q [11]
纪率，一百一万四千. A [12]
气元率，一万九千五百. B [13]
元闰，三十七万七千八百七十三. C [14]
元数，四百二. E [15]
气等率，五十二. k [16]
因率，一百四十四. h [17]
蕃率，三百二十五. t_2 [18]
朔等数，一. k' [19]
因数，四十五万七千九百九十九. h' [20]
蕃数，四十九万九千六十七. t_2' [21]
朔积年，七百八十三万九千. F [22]
积年，七百八十四万八千一百八十三. $(H+T)$ [23]

术曰：以历法求之，大衍入之. 调日法，如何承天术，用强弱母子互乘，得数，并之，为朔余. 以二十九日通日法，增入朔余，为朔率. 又以日法乘前历所测冬至气刻分，收弃末位为偶数，得斗分. 与日法，用大衍术入之，求等数，因率，蕃率. 以纪乘等数为约率. 置所求气定骨，如约率而一，得数，以乘因率，满蕃率去之，不满以纪法乘之，为入元岁. 次置岁日，以日法通之，并以斗定分，为岁率. 以十二月乘朔率，减岁率，余为岁闰. 以岁闰乘入元岁，满朔率去之，不满为入闰. 与闰骨相减之，得差，或适足，便以入元岁为积年。后术并不用，或差在刻分法半数以下者，亦以入元岁为积年. 必在刻分法半数以

上，郤以闰泛骨并朔率，得数，内减入闰，余与朔率，求闰缩。在朔率以下，便为闰缩。以上，用朔率减之，亦得。以纪法乘日法，为纪率。以等数约之，为气元率。以气元乘岁闰，满朔率去之，不满为元闰。虚置一亿，减入元岁，余为实，元率除之，得乘限。乃以元闰与朔率，用大衍入之，求得等数，因数，蓨数。以等数约闰缩，得数，以因数乘之，满蓨数去之，不满，在乘限以下，以乘元率，为朔积年。并入元岁，为演纪积年。又加成历年。

今人相乘演积年，其术如调日法，求朔余朔率，立斗分岁余，求气骨朔骨闰骨，及衍等数约率因率蓨率，求入元岁岁闰入闰元率元闰，已上皆同此术。但其所以求朔积年之术，乃以闰骨减入闰，余谓之闰赢，郤与闰缩朔率，列号甲乙丙丁四位，除乘消减，谓之方程，乃求得元数，以乘元率，所得谓之朔积年。加入元岁，共为演纪岁积年。所谓方程，正是大衍术。今人少知。非特置算系名，初无定法可传，甚是惑误后学，易失古人之术意。故今术不言闰赢，而曰入闰差者，盖本将来可用入元岁便为积年之意。故今止将元闰朔率二项，以大衍先求等数因数蓨数者，乃做前求入元岁之术理，假闰骨如气骨，以等数为约数，及求乘数蓨数。以等约闰缩，得因乘数，满蓨去之，不满，在限下，以乘元率，便得朔积年。亦加入元岁，共为演纪积年。此术非惟止用乘除省便，又且于自然中，取见积年，不惑不差矣。新术敢不用闰赢而求者，实知闰赢已存于入闰之中。但求朔积年之奇分，与闰缩等，则自与入闰相合，必满朔率所去故也。数理精微，不易窥识，穷年致志，感于梦寐，幸而得之，议不敢隐。

【注】 沈钦裴氏改正求入元岁："以岁余为奇，纪率为定，用大衍术求之。……"而秦氏乃以"斗分与日法，用大衍术入之。……"二术给出了相同的演纪积年。沈氏对于这一部分的改正，至为恰当。因为秦氏给出的入元岁，不是适合条件的最简数字，只有当演纪积年大于入元岁时，结果才是正确的。

【新释】：设强率为 $\frac{p_1}{q_1}$、弱率为 $\frac{p_2}{q_2}$、强数为 r_1，弱数为 r_2，用何承天调日法(其解析，请参考：清李锐著《日法朔余强弱考》1799)则得

$$\text{朔余：}\phi=r_1p_1+r_2p_2 \qquad (\alpha)$$

$$\text{日法：}S=r_1q_1+r_2q_2 \qquad (\beta)$$

$$\text{朔率：}M=2\rho S+\phi \qquad (\gamma)$$

又设统天历所测气刻分为 r，则

$$\text{斗分：}R=Sr \qquad (\delta)$$

式中末位收弃为偶数.

复设 $(R,\ S)=k$，则

$$\text{气等率(气等数)}=k \qquad (\varepsilon)$$

$$\because \quad \left|\frac{R}{S}=\right|\frac{kt_1}{kt_2},$$

故可得

$$\left|\frac{hkt_1}{kt_2}=k\right.$$

或

$$\left|\frac{ht_1}{t_2}=1.\right.$$

于是

$$\text{因率}=h \qquad (\zeta)$$

$$\text{蔀率}=t_2=\frac{S}{k} \qquad (\eta)$$

设约率为 g，且知纪法为 60，因得

$$g=60k \qquad (\theta)$$

次设所求气定骨为 a_1，则得入元岁：

$$G=60\left|\frac{\frac{a_1}{g}\cdot h}{t_2}\right. \qquad (\tau)$$

又设岁率为 N，岁闰为 K_1，入闰为 K_2，则

$$N=365S+R \tag{\varkappa}$$

$$K_2=N-12M \tag{\lambda}$$

$$K_2=\left|\frac{K_1G}{M}\right. \tag{\mu}$$

次设所求朔定骨为 a_2，闰骨为 a_3，则

$$a_3=a_1-a_2 \tag{\nu}$$

又半刻法为 $\frac{S}{200}$，并设闰赢(闰差)为 P，闰缩为 Q，则有

$$P=K_2-a_3 \tag{\xi_1}$$

在(ξ_1)式中，当 $K_2=a_3$ 或 $K_2\sim a_3<\frac{S}{200}$ 时，便以入无岁为演纪积年．当 $K_2<a_3$ 时，则得

$$P=M+K_2-a_3 \tag{\xi_2}$$

而

$$Q=\left|\frac{M+a_3-K_2}{M}\right. \tag{\xi}$$

次设纪率为 A，气元率为 B，则

$$A=60S \tag{o}$$

$$B=\frac{A}{k} \tag{\pi}$$

次设元闰为 C，则

$$C=\left|\frac{BK_1}{M}\right. \tag{\rho}$$

设乘限为 D，则

$$D=\frac{10^8-G}{B} \tag{\varphi_1}$$

宋景昌以为“此盖恐积年过于一亿，运算繁多，故设乘限，以为元数

之限. 假使历过元数,大于乘限,则日法,朔余,便须改设,并蔀数亦改求矣. 唐宋演撰家相沿如此,未可废也.

复设$(C,\ M)=k'$,则

$$朔等数=k' \qquad (\sigma)$$

又因
$$\left|\frac{C}{M}=\frac{k't_1'}{k't_2'},\right.$$

故可得
$$\left|\frac{h'k't_1'}{k't_2'}=k'\right.$$

或
$$\left|\frac{h't_1'}{t_2'}=1.\right.$$

因得

$$因数=h' \qquad (\tau)$$

$$蔀数=t_2'=\frac{M}{k'} \qquad (\nu)$$

更设元数为E,朔积年为F,演纪积年为H,成历年上距演纪标准年年数为T,则

$$E=\left|\frac{\frac{Q}{k'}\cdot h'}{t_2'}\right. \qquad (\varphi)$$

$$F=BE \qquad (\chi)$$

$$H=F+G \qquad (\psi_1)$$

因得

$$本历积年=H+T \qquad (\psi)$$

【原草】 草曰:本历以何承天术,调得16900,为日法. 系339强,17弱,先以强数339,乘强子26,得8814于上. 次以弱数17,乘弱子9,得153,并上,共得8967,为朔余. 次以日法通朔策29日,得490100,增入朔余,得499067,为朔率. 又以日法乘统天历所测每岁冬至周日下24刻31分,得4108分39秒,为斗泛分. 验

8分既偶,遂弃39秒,只以4108分,为斗定分. 与日法,以大衍术入之,求得52为等数,144为因率,325为�率. 以甲子60为纪法,乘等数,得3120,为约率. 欲置本历上课所用嘉泰甲子岁气骨11日44刻61分54秒,以乘日法,得193440分26秒,为气泛骨. 欲满约率3120而一,故就近乃弃微秒,只以193440为气定骨. 然后以约率3120除之,得62,以因率144乘之,得8928,满蕃率325去之,不满153 以纪法60乘之,得9180年,为入元岁. 次置岁日365,以日法通之,得6168500,并斗定分4108,得6172608,为岁率. 欲以12月乘朔率499067,得5988804,减岁率,余183804,为岁闰. 以岁闰乘入元岁9180,得1687320720,满朔率去之,不满474260,为入闰. 次置本历所用嘉泰甲子岁天正月朔1日75刻55分62秒,以日法乘之,得29668分9978秒,为朔泛骨. 就近收秒为1分,共为29669,为朔定骨数. 然后乃以朔定骨减气定骨193440,余163771,为闰泛骨. 置日法,以200约之,得84半,为半刻法. 次以闰泛骨与入闰相课,减之,余310489,此是闰赢. 为差,半刻法以上,乃以闰泛骨并朔率,共得662838,以入闰474260减之,余188578,在朔率下,便为闰缩. 次以纪策60乘日法,得1014000,为纪率. 以等数52约纪率,得19500,为气元率. 以气元率. 乘岁闰183804,得3584178000,满朔率去之,不满377873,为元闰. 次置1亿,以入元岁9180减之,余99990820,为实. 以元率19500为法,除之,得5127,为乘元限数. 乃以元闰377873,与朔率499067,用大衍术求之,得等数1,因数457999,蕃数499067. 然后以等数1约闰缩,只得188578,以因数457999乘之,得86368535422,满蕃数499067去之,不满402,在乘元限数以下,为可用,乃以乘元率19500,得7839000年,为朔积年. 并入元岁9180,共得7848180,为嘉泰4年甲子岁积算. 本历系于丁卯岁进呈,又加丁卯3年,共为7848183算,为本历积年. 合其算图如后:

何承天调日法

𝍨 强母 𝍥 强子 𝍦 弱母 𝍨 弱子

𝍬 𝍪 𝍩 强弱四率

日法 〇 分 〇 约法 上 𝍧 下 𝍨 副置 𝍨 𝍦 𝍨 强母

〇 〇 以百 𝍮 上以 𝍮 〇 𝍬 以强母约

𝍧 𝍠 约之 𝍠 𝍠 𝍠 𝍨

一因 下位

𝍮 下以 上 下

𝍠 𝍠 𝍢 三因

𝍨 上位 〇 得数 𝍦 余 𝍦 弱母

𝍮 𝍩 𝍩 𝍩 以弱母乘得数，

𝍠

𝍧 上位 〇 得数 𝍦 余

𝍮 𝍪 𝍩 以得数并上位。

𝍠 𝍠

𝍨 强数 𝍦 弱数 以两行强弱

𝍫 𝍩

𝍢 数子对乘之，

𝍥 强子 𝍨 弱子

𝍪

𝍨 𝍢 得 𝍦 余数

𝍩 〇 𝍮

𝍢 𝍯

𝍠 𝍭

次以日法乘朔策日，得数，并朔余，为朔率.

日法

朔策

得数

朔率

朔余

得数

日法

日

斗泛分

斗分见偶则弃，见奇则收为偶.

右行 斗分

日法

商

左行 天元

空

斗分

日法

余

商

天元

商

斗分

日法

余

天元

归数

斗分　余　日法　余

天元　归数

斗分　余　日法　余　商

率　归

斗分余　日法余　商

率　归

商　斗分余　日法余

率　归

商　斗分　余　日法　余

率　归

斗分余　日法余　商

率　归

等 乘率

[illegible]

等 部率

[illegible]

等 乘率

[illegible]

等 归

[illegible]

等 乘率

[illegible]

等 归

[illegible]

商

[illegible]

气骨

[illegible]

日

[illegible]

日法

气泛骨

[illegible]

右行 左行

约率 乘率

[illegible]

部率

[illegible]

右行 左行

等数 乘率

[illegible]

纪策 部率

[illegible]

入元岁

[illegible]

不满

[illegible]

纪策

[illegible]

商去之

[illegible]

得数

[illegible]

部率

[illegible]

商

[illegible]

因率

[illegible]

得数

[illegible]

商

[illegible]

气定骨

[illegible]

约率

[illegible]

岁策日	365	岁率	6172608		岁率	6172608
日法	16900	朔率	499067	上	月得数	5988804
得数	6168500	月数	12	副	岁闰	183804
斗分	4108			中	入元岁	9180
				次	入得数	1687320720
				下		

乃以副位得数，减上位岁率，余为岁闰. 次以次位入元岁乘中位岁闰，成下位.

入得数	1687320720	朔骨	1798062	气定骨	193440
朔率	499067	日法	16900	朔定骨	29659
入闰	474260	朔泛骨	296688568	闰泛骨	163781
		收数	72		
		朔定骨	29659		

日法 𝍩𝍮𝍨〇〇 约法 𝍡〇〇 半别法 𝍰𝍣𝍭	入闰 𝍬𝍦𝍬𝍡𝍮〇 闰泛骨 𝍩𝍥𝍫𝍦𝍯𝍠 闰差 𝍫𝍠〇𝍣𝍰𝍧 即闰赢	朔率 𝍬𝍨𝍱〇𝍮𝍦 闰泛骨 𝍩𝍥𝍫𝍦𝍯𝍠 得数 𝍮𝍥𝍪𝍧𝍫𝍧

闰缩 𝍩𝍧𝍯〇𝍮𝍧 入闰 𝍬𝍦𝍬𝍡𝍮〇	纪策 𝍮〇 日法 𝍠𝍮𝍨〇〇 纪率 〇〇𝍠𝍬〇〇〇	气元率 𝍠𝍰𝍨〇〇 纪率 𝍠〇𝍠𝍬〇〇〇 等数 𝍬𝍡

气元 𝍠𝍰𝍨〇〇 岁闰 𝍩𝍧𝍫𝍧〇𝍣 得数 𝍬𝍨𝍯𝍢𝍩𝍦𝍰〇〇〇 朔率 𝍬𝍨𝍱〇𝍮𝍦	元闰 𝍯𝍦𝍯𝍧𝍮𝍢 虚亿 〇〇〇〇〇〇〇〇〇 入元岁 𝍰𝍠𝍯〇	乘元限 〇𝍠𝍪𝍦 余实 𝍰𝍧𝍰𝍧〇𝍧𝍪〇 元率 𝍠𝍯𝍧〇〇

右行

元闰　𝍰𝍦𝍯𝍧𝍯𝍧

朔率　𝍬𝍧𝍱〇𝍮𝍦

商　𝍠

左行

天元　𝍠

空　〇

元闰　𝍰𝍦𝍯𝍧𝍯𝍧

朔率余　𝍩𝍡𝍩𝍠𝍱𝍧

商　𝍠

天元　𝍠

〇

商　𝍢

元闰　𝍰𝍦𝍯[illegible]𝍯𝍢

朔率余　𝍩𝍡𝍩𝍠𝍱𝍧

天元　𝍠

归　𝍠

商　𝍢

元闰余　𝍠𝍱𝍡𝍱𝍠

朔率余　𝍩𝍡𝍩𝍠𝍱𝍧

天元　𝍠

归　𝍠

元闰余　𝍠𝍱𝍡𝍱𝍠

朔率余　𝍩𝍡𝍩𝍠𝍱𝍧

商　𝍧

数　𝍤

归　𝍠

元闰余　𝍠𝍱𝍡𝍱𝍠

朔率余　𝍮𝍧𝍮𝍥

商　𝍧

𝍤

𝍠

商 元闰余 朔率余 数 归

元闰余 朔率余 数 归

元闰余 朔率余 商 数 归

元闰余 朔率余 商 数 归

商 元闰余 朔率余 数 归

商 元闰余 朔率余 数 归

元闰余	数	朔率余	归	商
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

商	元闰余	数	朔率余	归
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

元闰余	数	朔率余	归	商
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

商 [illegible]
元闰余 [illegible]
数 [illegible]
朔率余 [illegible]
归 [illegible]

商 [illegible]
等 [illegible]
数 [illegible]
等 [illegible]
归 [illegible]

等数 [illegible]
因数 [illegible]
等数 [illegible]
归 [illegible]

等数 [illegible]
因数 [illegible]
蔀数 [illegible]
即朔数

因数 [illegible]
闰缩 [illegible]
得数 [illegible]
蔀数 [illegible]

不满 [illegible]
可用
乘元限 [illegible]

元数　ⅢⅢ○‖	嘉泰甲子积　Π≡Ⅲ≡∣≡○　年
气元数　∣≡Ⅲ○○	丁卯　Ⅲ
朔积年　Π≡Ⅲ≡○○○	Π≡Ⅲ≡∣≡Ⅲ
入元岁　≡∣≡○	开禧丁卯岁积年

【新释】 已知: $\frac{p_1}{q_1}=\frac{26}{49}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{9}{17}$, $r_1=339$, $r_2=17$. 又宋鲍澣之开禧历测定朔余为 0.5305917159, 即日月合宿为 29.5305917159 日. 由于

$$0.5305917159=\frac{339\times26+17\times9}{339\times49+17\times17},$$

$\therefore$　朔余: $\phi=339\times26+17\times9=8967$.　　[2]

日法: $S=339\times49+17\times17=16900$.　　[1]

朔率: $M=29\times16900+8967=499067$.　　[3]

按统天历所测 $r=0.2431$ 日(即每一回归年为 365.2431 日), 而开禧历嘉泰甲子岁气骨(上距日辰甲子的日数.)为 11.446154 日, 朔骨为 1.755562 日, 因得斗分:

$$R=16900\times0.2431=4108.39(\text{斗泛分})$$

$$=4108(\text{末位为偶, 即斗定分})\qquad[4]$$

次将 R 与 S，以大衍术入之.

$h=\alpha_4=144$	52(=1×52)(k)
$\alpha_2=33$	312 364(3
天元：$\alpha_0=1$	3744 4108(8
空〇	16900(4 16432
$\alpha_1=4$	468(1 364
$\alpha_3=37$	104(=2×52)

因得

$$k=52, \tag{16}$$

$$h=144, \tag{17}$$

$$t_2=\frac{16900}{52}=325(=\alpha_3+2\alpha_4). \tag{18}$$

又约率： $g=60\times52=3120$.

$\alpha_1=16900\times11.446154=193440.0026$(气泛骨)

$=193440$(气定骨).

$$\because\quad \left|\frac{\frac{\alpha_1}{g}\cdot h}{t_2}=\right|\frac{\frac{193440}{3120}\times144}{225}=153,$$

$$\therefore\quad G=60\times153=9180\text{ 年}. \tag{7}$$

又知：

$$N=365\times16900+4108=6172608, \tag{5}$$

$$K_1=6172608\quad 12\times499067=183804, \tag{6}$$

$$\therefore\quad K_2=\left|\frac{183804\times9180}{499067}=474260.\right. \tag{8}$$

又

$$a_2=1.755562\times16900=29668.9978(\text{朔泛骨})$$
$$=29669(\text{朔定骨}),\qquad[9]$$
$$\therefore\quad a_3=193440-29669=163771.\qquad[10]$$

由(ξ_1)式，得

$$P=474260-163771=310389.$$

又
$$\text{半刻法}=\frac{16900}{200}=84.5,$$

因知
$$P>84.5.$$

由(ξ)式，得

$$Q=\left|\frac{490967+163771-474260}{499067}\right.=188578.\qquad[11]$$

又纪率：

$$A=60\times16900=1014000,\qquad[12]$$
$$\therefore\quad B=\frac{1014000}{52}=19500,\qquad[13]$$
$$C=\left|\frac{19500\times183804}{499067}\right.=377873.\qquad[14]$$

又乘限：
$$D=\frac{10^8-9180}{19500}=5127^+.$$

次将 C 与 M，以大衍术入之.

$h'=a_{10}=457999$	$1(=k')$
	11
$a_8=6251$	12(11
	78
$a_6=3689$	85(1
	474
$a_4=70$	559(3
	13782
$a_2=4$	14291(2

天元$a_0=1$	363582 377873(3
空 0	499067(1 377873
$a_1=1$	121194(3 114328
$a_3=33$	6866(12 6708
$a_5=873$	158(1 85
$a_7=3562$	73(6 72
$a_9=41068$	1

因得

$$k'=1, \qquad [19]$$

$$h'=a_{10}=457999, \qquad [20]$$

$$t_2'=\frac{499067}{1}=499067(=a_9+a_{10}). \qquad [21]$$

由(φ)式,得

$$E=\left|\frac{\frac{188578}{1}\times 457999}{499067}\right|=402. \qquad [15]$$

在乘限 5127 以下,可用. 于是

$$F=19500\times 402=7839000\ 年, \qquad [22]$$

$$H=7839000+9180=7848180\ 年.$$

从而可得

$$本历积年=7848180+3=7848183\ 年. \qquad [23]$$

【简捷解法】 为了求得演纪积年,本问亦可应用次之方式进行运算:

I．以岁余分：$5\times16900+4108=88608$，纪率(A)：1014000，与气骨分：193440，求入元岁，亦即求次式中 α_0 之值：

$$88608\alpha_0+1014000\alpha_1=193440$$

或

$$142\alpha_0+1625\alpha_1=310.$$

```
                          142
(p0)     2)310    1625(11(q0)
           284    1562
                    63
(p1)     0) 26     142(2 (q1)
                   126
                    16
(p2)     1) 26      63(4 (q2)
            16      64
                    -1
(p3)  -10)10        16(-16 (q3)
           10       16
               0
```

因得：

$$\alpha_3=p_3=-10,$$

$$\alpha_2=p_2-q_2\alpha_3=1+40=41,$$

$$\alpha_1=p_1-q_1\alpha_2+\alpha_3=0-82-10=-92,$$

$$\alpha_0=p_0-q_0\alpha_1+\alpha_2=2+1012+41=1055.$$

$\therefore$　入元岁$=1055$年.

II．以岁余5.2431与甲子60日或岁余分88608与纪率1014000求冬至与甲子会积年：

$$\because\quad (88608,\ 1014000)=624,$$

$$\therefore 会积年=\frac{1014000}{624}=1625\text{ 年}.$$

是以本历至嘉泰甲子岁积年：

$$H=1055+1625n_1$$

按原答，入元岁：

$$9180\equiv1055(\mathrm{mod}.\ 1625).\qquad (a)$$

III．以闰骨率(α_8)：163771，朔率(ϕ)：499067 与岁闰(K_1)：183804 求入元闰积年．亦即求次式中 α_0 之值：

$$183804\alpha_0+499067\alpha_1=163771.$$

			183804		
(p_0)	0)	163771	499067	(2	(q_0)
			367608		
			131459		
(p_1)	1)	163771	183804	(1	(q_1)
		131459	131459		
			52345		
(p_2)	0)	32312	131459	(2	(q_2)
			104690		
			26769		
(p_3)	1)	32312	52345	(2	(q_3)
		26769	53538		
			−1193		
(p_4)	−4)	5543	26769	(−22	(q_4)
		4772	26246		
			523		
(p_5)	1)	771	−1193	(−2	(q_5)
		523	−1046		
			−147		
(p_6)	−1)	248	523	(−4	(q_6)
		147	588		
			−65		
(p_7)	−1)	101	−147	(2	(q_7)
		65	−130		
			−17		
(p_8)	−2)	36	−65	(4	(q_8)
		34	−68		
			3		
(p_9)	0)	2	−17	(−6	(q_9)
			−18		
			1		
(p_{10})	2)	2	3	(3	(q_{10})
		2	3		
			0		

因得：
$$\alpha_{10}=p_{10}=2,$$
$$\alpha_9=p_9-q_9\alpha_{10}=0+12=12,$$
$$\alpha_8=p_8-q_8\alpha_9+\alpha_{10}=-2-48+2=-48,$$
$$\alpha_7=p_7-q_7\alpha_8+\alpha_9=-1+96+12=107,$$
$$\alpha_6=p_6-q_6\alpha_7+\alpha_8=-1+428-48=379,$$
$$\alpha_5=p_5-q_5\alpha_6+\alpha_7=1+758+107=866,$$
$$\alpha_4=p_4-q_4\alpha_5+\alpha_6=-4+19052+379=19427,$$
$$\alpha_3=p_3-q_3\alpha_4+\alpha_5=1-38854+866=-37987,$$
$$\alpha_2=p_2-q_2\alpha_3+\alpha_4=0+75974+19427=94501,$$
$$\alpha_1=p_1-q_1\alpha_2+\alpha_3=1-95401-37987=-133387,$$
$$\alpha_0=p_0-q_0\alpha_1+\alpha_2=0+266774+95401=362175.$$

∴　入元闰积年=362175 年.

IV．以岁闰 183804 与朔率 499067 求气朔会积年.

∵　(183804, 499067)=1,

∴　气朔会积年$=\dfrac{499067}{1}=499067$ 年.

是以本历至嘉泰甲子岁积年：
$$H=362175+499067n_2 \tag{b}$$

V．由(a)，(b)二式，得
$$H=1055+1625n_1=362175+499067n_2$$
或
$$1625n_1-499067n_2=361120. \tag{c}$$

我们在(c)式中任求一个$n_i(i=1,\ 2)$的值，代入(a)或(b)式，都可给出 H 的值.

$$
\begin{array}{llrrll}
 & & & 1625 & & \\
(p_0) & 222) & 361120 & -499067 & (-307 & (q_0) \\
 & & 360750 & -498875 & & \\
 & & & -192 & & \\
(p_1) & -1) & 370 & 1625 & (-8 & (q_1) \\
 & & 192 & 1536 & & \\
 & & & 89 & & \\
(p_2) & 2) & 178 & -192 & (-2 & (q_2) \\
 & & 178 & -178 & & \\
 & & 0 & & &
\end{array}
$$

因得
$$\alpha_2 = p_2 = 2,$$
$$n_2 = \alpha_1 = p_1 - q_1\alpha_2 = -1 + 16 = 15.$$

把 n_2 的值代入(6)式，得
$$H = 362175 + 499067 \times 15 = 7848180 \text{ 年},$$
$$\therefore \quad \text{本历积年} = 7848180 + 3 = 7848183 \text{ 年}. \qquad [23]$$

13. 缀 术 推 星

问岁星合伏，经一十六日九十分，行三度九十分，去日一十三度乃见．后顺行一百一十三日，行一十七度八十三分乃留．欲知合伏段、晨疾初段、常度、初行率、末行率、平行率，各几何？

答曰：合伏，一十六日九十分，

常度，三度九十分．

初行率，二十三分九十七秒，

平行率，二十三分二秒，

末行率，二十二分七秒．

晨疾初，三十日．

常度，六度一十三分．

初行率，二十二分六秒(原答，二十一分九十六秒．)．

平行率，二十分三十七秒(原答，二十分三十三秒．)．

末行率，一十八分八十秒(原答，一十八分六十九秒．)．

术曰：以方程求之，置见日，减一，余半之，为见率．以伏日并见日，为初行法．以法半之，加见率，共为伏率．以伏日乘伏率，为伏差，以见日乘见率，为见差．以见（原为“伏”）日乘伏（原为“见”）差于上，以伏（原为“见”）日乘见（原为“伏”）差，减上，余为法．以见日乘伏度，为泛．以伏日乘见度，减泛，余为实．满法而一，为度，不满，退除为分秒，即得日差．

求初行率，置初行法，减一，余乘日差，为寄．以半初行法乘寄得数，又加伏见度，共为初行实．以法退除之，得合伏日初行率．

求末行率，以段日乘日差，减初行率，余为末行率．或置段日，减一，余乘日差，减初行率，余为末行率（原无“或置段日，减一，余乘日差．减初行率，余为末行率．”诸语．以草中求晨疾初末行率时，曾用此术，故增入之．）．

求平行率，以初行率并末行率而半之，为平行率．

求交段差，以各段常日下分数，减全日一百分，余乘末日行率，为交段差．累减前段积度，以益后段积度，各为常度．

【新释】 在这里，我们假定岁星（即木星 Jupiter.）的视运动，是一个匀变速度运动，则此运动函数，便可应用等间距内插法公式为之．次设岁星合伏所行的积度为 S_1，所行的时间为 t_1，见段所行的积度为 S_2，所行的时间为 t_2，初行率（初速）为 v_0，末行率（末速）为 v_n，日差（加速度）为 a，则由差分方程（即高阶等差级数前 n 项求和的公式．）：

$$S_n = nu_0 + \frac{n(n-1)}{2} d_1,$$

可得

$$S_1 = t_1 v_0 + \frac{t_1(t_1-1)}{2} a \qquad (\alpha')$$

$$S_1 + S_2 = (t_1+t_2) v_0 + \frac{(t_1+t_2)(t_1+t_2-1)}{2} a \qquad (\beta')$$

解(α')，(β')二式，消去 v_0，即可得 a．但本问岁星是由伏而见，

由见而留，所以由(α')，(β')二式所确定的 a，一定是一个负值．我们为了得到正值的 a，可以将见日的末速视作初速，原来的初速，视作末速，这样便可给出下面的两个方程：

$$S_2=t_2v_n+\frac{t_2(t_2-1)}{2}a \qquad (\alpha)$$

$$S_1+S_2=(t_1+t_2)v_n+\frac{(t_1+t_2)(t_1+t_2-1)}{2}a \qquad (\beta)$$

(β)式减(α)式，得

$$S_1=t_1v_n+\frac{t_1(t_1+2t_2-1)}{2}a \qquad (\gamma)$$

(α)，(γ)二式，便是秦氏给出的草中次图的两个方程式．式中

$$见率=\frac{t_2-1}{2},$$

$$初行法=t_1+t_2,$$

$$伏率=\frac{t_1+t_2}{2}+\frac{t_2-1}{2}$$

$$=\frac{t_1+2t_2-1}{2},$$

$$见差=\frac{t_2(t_2-1)}{2},$$

$$伏差=\frac{t_1(t_1+2t_2-1)}{2}.$$

联立解(α)，(γ)式，消去 v_n，以 t_1 乘(α)式，t_2 乘(γ)式，相减，得

$$t_2S_1-t_1S_2=\frac{t_1t_2}{2}(t_1+t_2)a,$$

$$\therefore\quad a=\frac{t_2S_1-t_1S_2}{\frac{t_1t_2}{2}(t_1+t_2)} \qquad (\delta)$$

由(β')式，得初行率：

$$v_0=\frac{\frac{1}{2}(t_1+t_2)(t_1+t_2-1)a+S_1+S_2}{t_1+t_2} \qquad (\varepsilon)$$

由一阶等差级数求第 n 项的公式，得末行率：

$$v_n=v_0-(t-1)a \qquad (\zeta)$$

或

$$v_n=v_0-ta \qquad (\zeta_1)$$

秦氏术中所述为(ζ_1)式，而草中求晨疾初段的末行率时，用的是(ζ)式，求合伏日的末行率时，用的是(ζ)式．若用数学分析和物理学的观点，来考虑这个问题，可以说由(ζ)式所给的 v_n，是末日初行率，由(ζ_1)式所给的(v_n)，是末日末行率．秦氏的所以应用(ζ_1)式来求合伏日的末行率，大概是发觉到合伏日段下有分，若再用(ζ)式时，则所求得的 v_n，已经不再是末日任何时刻的行率了。因此他就创立了(ζ_1)式，以应用于段日有分的情形．

又设平行率(平均速度)为 $\bar{v}$，则

$$\bar{v}=\frac{1}{2}(v_0+v_n) \qquad (\eta)$$

次设合伏段常日下分数为 p，则

$$交段差=(1-p)v_n \qquad (\theta)$$

又设晨疾初段常日为 t_2'，常度为 S_2'，交段差所行的时间为 t_1'，合伏交差晨疾初段共积度为 S'，则

$$S'=(t_1+t_1'+t_2')v_0-\frac{1}{2}(t_1+t_1'+t_2')(t_1+t_1'+t_2'-1)a$$

而

$$S_2=S'-S_1-(1-p)v_n \qquad (\iota)$$

【原草】　草曰：兼具算图．以伏日随伏度为右行，以见日随见度为左行，以度对度，日对日，其度于上，日于中，空其下，列之．

左行	初图	右行	
𝍩𝍦𝍰𝍢 见度		𝍢𝍱 伏度	上
𝍠𝍩𝍢 见日		𝍩𝍥𝍱 伏日	中
〇		〇	下
𝍩𝍦𝍰𝍢 见度		𝍢𝍱 伏度	
𝍠𝍩𝍢 见日		𝍩𝍥𝍱 伏日	
𝍠𝍩𝍡 余		〇	
𝍩𝍦𝍰𝍢 见度		𝍢𝍱 伏度	
𝍠𝍩𝍢 见日		𝍩𝍥𝍱 伏日	
𝍭𝍥 见率		〇	

置见日 113，减 1，余 112，以半之，得 56，为见率．以伏日 16 日 90 分，并见日 113，得 129 日 90 分，为初行法．

左行	法图	右行
𝍩𝍦𝍰𝍢		𝍢𝍰
见度		伏度
𝍠𝍩𝍣	𝍠𝍪𝍨𝍰	𝍩𝍥𝍰
见日	初行法	伏日
𝍭𝍥		〇
见率		
𝍩𝍦𝍰𝍣		〇𝍰
见度	初行法	伏度
𝍠𝍩𝍣	𝍠𝍪𝍨𝍰	𝍩𝍥𝍰
见日		伏日
𝍭𝍥	𝍮𝍣𝍱𝍭	〇
见率	半法寄位	
𝍩𝍦𝍰𝍢	𝍠𝍪𝍨𝍰	𝍢𝍰
见度	初行关	伏度
𝍠𝍩𝍣		𝍩𝍥𝍰
见日		伏日
𝍭𝍮	𝍠𝍪〇𝍱𝍤	〇
见率	伏率	

以初行法半之，得 64 日 95 分，并见率 56 日，得 120 日 95 分，为伏率。以初行法寄之，以伏率归右下，以对见率，仍分左右两行为首图。

左行		右行
𝍩𝍦𝍰𝍢 见度	首图	𝍢𝍱 伏度
𝍠𝍩𝍢 见日		𝍩𝍥𝍱 伏日
𝍭𝍥 见率		𝍠𝍪〇𝍱𝍤 伏率
左行		右行
𝍩𝍦𝍰𝍢 见度	次图	〇𝍱 伏度
𝍠𝍩𝍢 见日		𝍩𝍥𝍱 伏日
𝍮𝍢𝍪𝍧 见差		𝍪〇𝍬𝍣〇𝍤𝍭 伏差

以首图伏日16日90分，乘伏率120日95分，得2044日5分50秒，为伏差于右下，以首图见日113，乘见率56日，得6328日，为见差于左下，乃成次图．凡方程之术，先欲得者存之，以未欲得者互遍乘两行诸数，今验次图，先欲得日差，故存其左右之上下，以左右之中伏见日数，互遍乘两行．乃以次图右中伏日16日90分，先遍乘左行毕，左上得301度32分70秒，左中得1909日70分，左下得106943日20分．又以次图左中见日113，遍乘右行毕，右上得440度70分，右中亦得1909日70分，右下得230978日21分50秒．

左		右
[illegible]	才图	[illegible]
见泛度		伏泛度
[illegible]		[illegible]
见积日		伏积日
[illegible]		[illegible]
见法		伏法
		度
	维图	[illegible]
〇		日差实
〇		〇
〇		日
		[illegible]
		日差法

故以两行所得，变名泛积法，而成才图．乃验才图左上下皆少，用减右行毕，右上余139度37分30秒，为日差实．右中空，右下得124035日1分50秒，为日差法．今维图法多实少，除得空度空分11秒23小分65小秒，不尽10秒55小分39小秒52微分50微秒，收为1小秒，为日定差11秒23小分66小秒．

日 初行法 减日 余 度 日差 度 寄	日差 度 分 秒 小分 小秒 秒 小分 小秒 微分 微秒 法位

既得日差，乃求初行率，置法图内初行法 129 日 90 分，内减去 1 日，余 128 日 90 分，乘日差 11 秒 23 小分 66 小秒，得空度 14 分 48 秒 39 小分 77 小秒 40 微分，为寄．次置初行法 129 日 90 分，半之，得 64 日 95 分，乘寄，得 9 度 40 分 73 秒 43 小分 32 小秒 13 微分，为得数．

日

𝍩𝍡𝍨𝍱

初行法

𝍡

半法

日

𝍮𝍣𝍱𝍤

得度

〇𝍩𝍨𝍱𝍧𝍯𝍨𝍮𝍦𝍰

寄度

𝍨𝍱〇𝍮𝍢𝍰𝍢𝍯𝍡𝍩𝍯

得数

𝍢𝍱

伏度

𝍩𝍦𝍰𝍢

见度

以得数，加伏度3度90分，见度17度83分，共得31度13分73秒43小分32小秒13微分，为初行实．如初行法129日90分而一．

度

𝍫𝍠𝍩𝍢𝍮𝍢𝍬𝍢𝍬𝍡𝍠𝍣

初行实

日

𝍠𝍪𝍣𝍭

初行法

度

〇𝍪𝍢𝍬𝍧

初行率

〇〇〇〇𝍣𝍩𝍢𝍬𝍡𝍩𝍣

余　秒

𝍠𝍪𝍣𝍭

法

乃得空度 23 分 97 秒，为伏合初日行率．余 3 秒 13 小分 32 小秒 13 微分，弃之．

求末行率，置合伏段日数 16 日 90 分，乘日差 11 秒 23 小分 66 小秒，得 1 分 89 秒 89 小分 85 小秒 40 微分，为得数．

一丅亖

伏日

度

○○○一丨〓Ⅲ⊥丅

日差

度

○○⊦≐Ⅲ≐Ⅲ≐〤亖

得数

○〓Ⅲ≐Ⅱ

初行率

度

○Ⅱ〓○Ⅱ一○一Ⅲ⊥

末行率

乃以得数，减初行率 23 分 97 秒，余 22 分 7 秒 10 小分 14 小秒 60 微分，为合伏末日行率．但注历收弃小分以下数余为定．

求平行率．置初行率 23 分 97 秒，并末行率 22 分 7 秒，得 46 分 4 秒，以半之，得 23 分 2 秒，为平行率．

〇 𝍪 𝍢 𝍱 𝍦

初行率

〇 𝍪 𝍡 〇 𝍦

末行率

〇 𝍬 𝍥 〇 𝍣

得数

𝍡

半法

〇 𝍪 𝍢 〇 𝍡

平行率

求交段差，置合伏日下，减全日100分，余10分．乘末行率22分7秒，得2分20秒70小分，为交段差

日

○　[illegible]

日

丨

日

○　一

度

○　═　‖　○　Π

末行率

度

○　○　‖　═　○　≑

交段差

求晨疾初段常度，置合伏日16日90分，乃收90分作1日，通为17日，并旧历所注晨疾初段常日30，得47，为共日．乘合伏初行率23分97秒，得11度26分59秒，为寄上．

日

合伏日

收分

日

常平

共日

度

寄上

乃副置共日 47，减 1，余 46，以半之，得 23，以乘副 47，得 1081．以乘日差 11 秒 23 小分 66 小秒，得 1 度 21 分 46 秒 76 小分 46 小秒，以减上寄 11 度 26 分 59 秒，余 10 度 5 分 12 秒 23 小分 54 小秒，为合伏晨疾初两段共积度．

共日 共日 日 得数

副位 正位 副 余 副 得

以一日减正 以工除余 以得乘副

日差 日 得数 得度 寄 共积度 合伏度 泛度

置共积，内减合伏 3 度 90 分，余 6 度 15 分 12 秒 23 小秒 54 小秒，为泛．次以交段差 2 分 20 秒 70 小分，减泛，余 6 度 12 分 91 秒 53 小分 54 小秒，为晨疾初段常度．注历乃收 8 秒 46 小分 46 小秒为全分常定度．

泛度

交段差

常泛度

收数

常定度晨疾初

求晨疾初段初行率，以日差 11 秒 23 小分 66 小秒，乘交段差日分 10，得 1 秒 12 小分 36 小秒 60 微分(原无"乘交段差日分 10，得 1 秒 12 小分 36 小秒 60 微分".二语)．减合伏末行率 22 分 7 秒．余 22 分 6 秒(原为"余 21 分 96 秒".)，为晨疾初段初行率得泛收之为定者也．

度

〇〇〇一丨二〣丄丅

日差

日

〇一

交段得

〇〇〇〇丨一〢〓丅丄

度

〇二〢〇𝍮

合伏末行率

度

〇二〢〇〇〦𝍮丄〣〓

晨疾初行泛

〇〇〇〇〇一〢〓丅丄

收数

度

〇二〢〇丅

晨疾初行率定数

求晨疾初末行率，置晨疾初常日30，减1，余29日，乘日差11秒23小分66小秒，得3分25秒86小分14小秒，以减晨疾初段初行率泛22分5秒87小分63小秒40微分（原为"21分95秒76小分34小秒"．），余18分80秒1小分49小秒40微分（原为"18分69秒90小分20小秒．"），为晨疾初末行率．

晨疾初 𝍫〇 常日 𝍠 减日 𝍪百 余 〇〇〇𝍩𝍠𝍪𝍢𝍮𝍥 日差 度 〇〇𝍢𝍪𝍣𝍫𝍥𝍩𝍣 得数 〇𝍪𝍡〇〇𝍫𝍦𝍮𝍢𝍬 晨疾初行泛 〇𝍩𝍦𝍫〇〇𝍠𝍬𝍧𝍬 晨疾末行率泛

求平行率，以晨疾初初行泛 22 分 5 秒 87 小分 63 小秒 40 微分(原为“21 分 95 秒 76 小分 34 小秒．”)，并晨疾初末行泛 18 分 80 秒 1 小分 49 小秒 40 微分(原为“18 分 69秒 90 小分 20 小秒．”)，内减日差 11 秒 23 小分 66 小秒(原无“内减日差 11 秒 23 小分 66 小秒”一语．)，得 40 分 74 秒 65 小分 46 小秒 80 微分(原为“40 分 65 秒 66 小分 54 小秒”．)，以半之，得 20 分 37 秒 32 小分 73 小秒 40 微分(原为“20 分 32 秒 83 小分 27 小秒．”)，为晨疾初平行泛．乃以三泛收弃之为定．

度

上　〇＝‖〇〇≐π⊥Ⅲ≣

晨疾初初行泛

〇━Ⅲ≐〇〇|≣Ⅲ≣

晨疾初末行泛

副　〇≣〇≐〇≐Ⅲ━‖≐

得

日差

〇〇〇━|≐Ⅲ⊥T

得数

次　〇≣〇≐X⊥〇XT≐

‖

半泛

下　〇＝〇≡π≡‖≐ⅢX

晨疾初平行泛

上并得副，
内减日差，
得次半之，
得下泛。

〇＝‖〇〇≐π⊥Ⅲ≣

初行泛

〇〇〇〇〇━‖≐T⊥

收数

〇━Ⅲ≐〇〇|≣Ⅲ≣

末行泛

〇〇〇〇〇〇|≡Ⅲ≣

弃数

〇＝〇≡π≡‖≐Ⅲ≣

平行泛

〇〇〇〇〇≡‖≐‖≣

弃数

收并泛，
弃减泛，
各得定。

晨疾初平行率	晨疾初末行率	晨疾初初行率
〇=〇≡‖ 度	〇一Ⅲ≐〇 度	〇=‖〇⊤ 度

【新释】 已知：$t_1=16.9$ 日，$t_2=113$ 日，$S_1=3.6$ 度，$S_2=17.83$ 度，代入(δ)式，得

$$a=\frac{113\times3.9-16.9\times17.83}{\frac{16.9\times113}{2}\times(16.9+113)}=\frac{440.7-301.327}{954.85\times129.9}$$

$$=\frac{139.373}{124035.015}\doteq0.00112366\text{ 度}$$

$=11$ 秒 23 小分 66 小秒.

由(ζ)式，得合伏段初行率：

$$v_0=\frac{\frac{1}{2}\times129.9\times(129.9-1)\times0.00112366+3.9+17.83}{16.9+113}$$

$$=\frac{9.4073433213+3.9+17.83}{129.9}=\frac{31.1373433213}{129.9}$$

$\doteq0.2397$ 度 $\doteq23$ 分 97 秒.

由(ζ_1)式，得合伏段末行率：

$$v_n=0.2397-16.9\times0.00112366=0.2397-0.018989854$$

$\doteq0.2207$ 度 $\doteq22$ 分 7 秒.

由(η)式，得合伏段平行率：

$$\bar{v}=\frac{1}{2}(0.2397+0.2207)=\frac{1}{2}\times0.4604$$

$=0.2302$ 度 $=23$ 分 2 秒.

次求交段差：已知 $p=0.9$，由(θ)式，得

$$交段差=(1-0.9)\times0.2207=0.02207 度$$
$$=2 分 20 秒 70 小分.$$

又知：$t_2'=30$ 日，$t_1'=0.1$ 日，$t_1=16.9$ 日，因得合伏交段晨疾初共积度：

$$S'=(t_1+t_1'+t_2')v_0-\frac{1}{2}(t_1+t_1'+t_2')(t_1+t_1'+t_2'-1)a$$
$$=47\times0.2397-\frac{1}{2}\times47\times46\times0.00112366$$
$$=11.2659-1.21467646=10.05122354 度.$$

由(τ)式，得晨疾初段常度：

$$S_2'=10.05122354-3.9-0.02207=6.12915354$$
$$\doteq6.13 度=6 度 13 分.$$

次求晨疾初段初行率：因 $v_n=0.2207$ 度，系合伏段末行率，亦即交段初行率，因得晨疾初段初行率：

$$v_0'=v_n-0.1\times0.00112366=0.2207-0.000112366$$
$$=0.220587634\doteq0.2206 度=22 分 6 秒.$$

由(ζ)式，得晨疾初段末行率（晨疾初段末日初行率）：

$$v_n'=v_0'-(t_2'-1)a=0.220587634-29\times0.00112366$$
$$=0.220587634-0.03258614=0.188001494$$
$$\doteq0.1880 度=18 分 80 秒.$$

由(η)式，得晨疾初段平行率：

$$\bar{v}'=\frac{1}{2}(v_0'+v_n'-a)$$
$$=\frac{1}{2}\times(0.220587634+0.188001494-0.00112366)$$
$$=\frac{1}{2}\times(0.408589128-0.00112366)$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.407465468$$

$$=0.203732734 \doteq 0.2037 \text{ 度}=20 \text{ 分 } 37 \text{ 秒}.$$

【注 1】 本问若应用数学分析和物理学所给出的公式:

$$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

$$v=\frac{dS}{dt}=v_0+at \tag{2}$$

来解时,将 t_1, t_2; S_1, S_2 分别代入(1)式,得

$$S_1=t_1v_0+\frac{1}{2}at_1^2 \tag{3}$$

$$S_1+S_2=(t_1+t_2)v_0+\frac{1}{2}a(t_1+t_2)^2 \tag{4}$$

联立解(3),(4)二式,亦同样可得日差:

$$|a|=\frac{t_2S_1-t_1S_2}{\frac{t_1t_2}{2}(t_1+t_2)} \tag{5}$$

日差 a 既经求出,由(4)式,可得初行率:

$$v_0=\frac{\frac{1}{2}(t_1+t_2)^2\cdot|a|+S_1+S_2}{t_1+t_2} \tag{6}$$

兹将 $t_1=16.9$ 日, $t_2=113$ 日, $S_1=3.9$ 度, $S_2=17.83$ 度,代(6)入式,得

$$v_0=\frac{\frac{1}{2}\times 129.9^2\times 0.00112366+3.9+17.83}{129.9}$$

$$=0.2403 \text{ 度}=24 \text{ 分 } 3 \text{ 秒}.$$

这是说 $0.2402 \text{ 度}<v_0<0.2403 \text{ 度}.$

此与用(8)式所得的结果:

$$v_0=23 \text{ 分 } 97 \text{ 秒},$$

竟相差约为 6 秒之多,这说明应用有限差分(差分方程)和无限差

分(微分学)相比较时所得的误差. 若将有限差分的时间单位(本问以"日"为时间单位)变小, 即使 t_1 以分$\left(\frac{1}{100}\text{日}\right)$为时间单位, 则由($\delta$)式, 得分差(每分加速度):

$$a_0=\frac{11300\times3.9-1690\times17.83}{\frac{11300\times1690}{2}\times(11300+1690)}$$

$$=\frac{13937.3}{124035015000}=0.000000112366\text{ 度}.$$

由(ε)式, 得初分行率:

$$v_0=\frac{\frac{1}{2}\times12990\times12989\times0.000000112366+3.9+17.83}{12990}$$

$$=\frac{84363555\times0.000000112366+21.73}{12990}$$

$$=\frac{9.479595+21.73}{12990}=\frac{31.209595}{12990}$$

$$\doteq0.00240258\cdots\doteq0.002403\text{ 度}.$$

应用求和公式, 因分差很小, 第二项可以略去不计(其值约为 $\frac{1}{2}$ 秒), 因得初日行率:

$$S_0=0.002403^-\times100=0.2403^-\text{度}=24\text{ 分 }3^-\text{秒}.$$

亦即
$$0.2402\text{ 度}<S_0<0.2403\text{ 度}.$$

这时应用(ε)式和(6)式所给的结果, 它们的绝对误差:

$$E<1\text{ 秒}.$$

由此足证, 当应用(ε)式时, 只要我们适当的选择单位, 同样地可以给出具有任意精确度的结果来.

【注 2】关于求日差部分, 馆案: "…此术逐日之递差为日差也. 术曰: 方程, 非也. 其所谓见数者, 乃徒设一数, 宛转附会, 使合于方程之行列也. ……特多立名目, 故为曲折颠倒, 使人不易辨耳. ……"我觉得这种批判古典著作的态度, 是非常粗暴的. 因为我们如

果假定秦氏已知最简差分方程:

$$S_n = nv_n + \frac{n(n-1)}{2}a \qquad (a)$$

只要把 S_n 和 n 代入上式，便很自然地产生了以 v_n 和 a 为未知量的一次联立方程:

$$S_2 = t_2 v_n + \frac{t_2(t_2-1)}{2}a,$$

$$S_1 = t_1 v_n + \frac{t_1(t_1+2t_2-1)}{2}a,$$

从而消去 v_n 给出 a，这样简易可行的方法，我们能说秦氏是"故为曲折颠倒，使人不易辨耳"么?

如果硬说秦氏根本不可能知道(a)式，由于故为曲折颠倒，宛转附会，而使合于方程的行列．也就是说，秦氏不是由于已知(a)式而有目的的进行代数变换，我看这种说法，也是没有充分理由的．

【注 3】 唐僧一行(683－727)大衍历(724)步日躔术内称"……又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一，以少减多，余为气差．……．倍气差亦倍六爻乘之，复综两气辰除为日差．……"兹设倍六爻为 t_0，前后二气盈缩分为 S_1，S_2，前后二气辰数为 t_1，t_2，则有

$$气差 = t_0\left(\frac{S_1}{t_1} - \frac{S_2}{t_2}\right),$$

$$日差 = \frac{2t_0^2}{t_1+t_2}\left(\frac{S_1}{t_1} - \frac{S_2}{t_2}\right) = \frac{t_0^2(t_2S_1 - t_1S_2)}{\frac{t_1t_2}{2}(t_1+t_2)}.$$

当 $t_0=1$ 时，即与秦氏所给的日差公式完全相同:

$$a = \frac{t_2S_1 - t_1S_2}{\frac{t_1t_2}{2}(t_1+t_2)}.$$

第四卷 凡 五 问

14. 揆日究微

问历代测景，惟唐大衍历最密．本朝崇天历，阳城冬至景一丈二尺七寸一分五十秒，夏至景一尺四寸七分七十九秒，系与大衍历同．今开禧历，临安府冬至景一丈八寸二分二十五秒，夏至景九寸一分，欲求临安府夏至后，差几日而景与阳城夏至日等，较以大衍历晷景所差尺寸，各几何？

答曰：大暑后五日午中景长一尺四寸八分八十五秒半(原脱“半”字)．

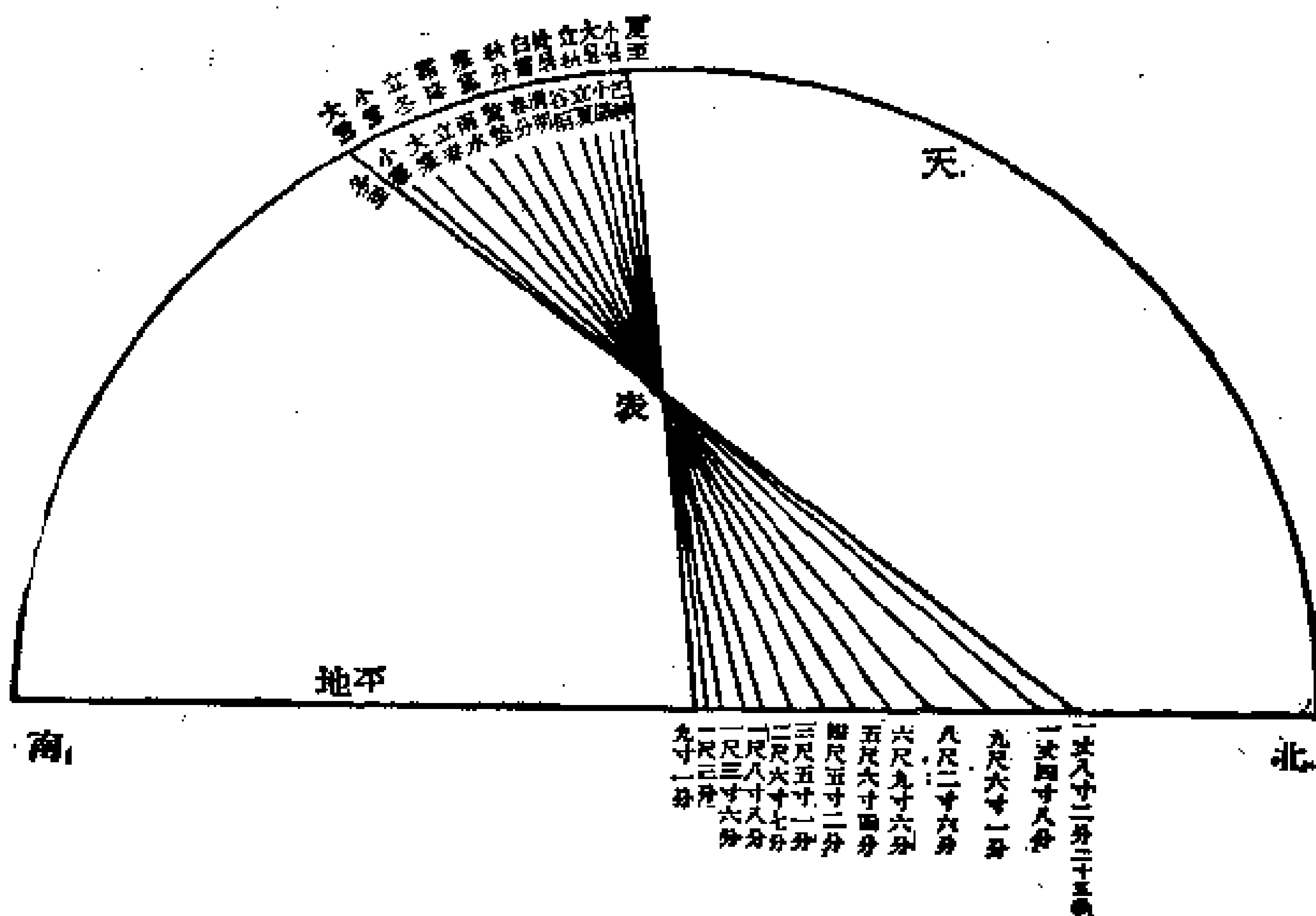


图1 开禧历临安府晷影图

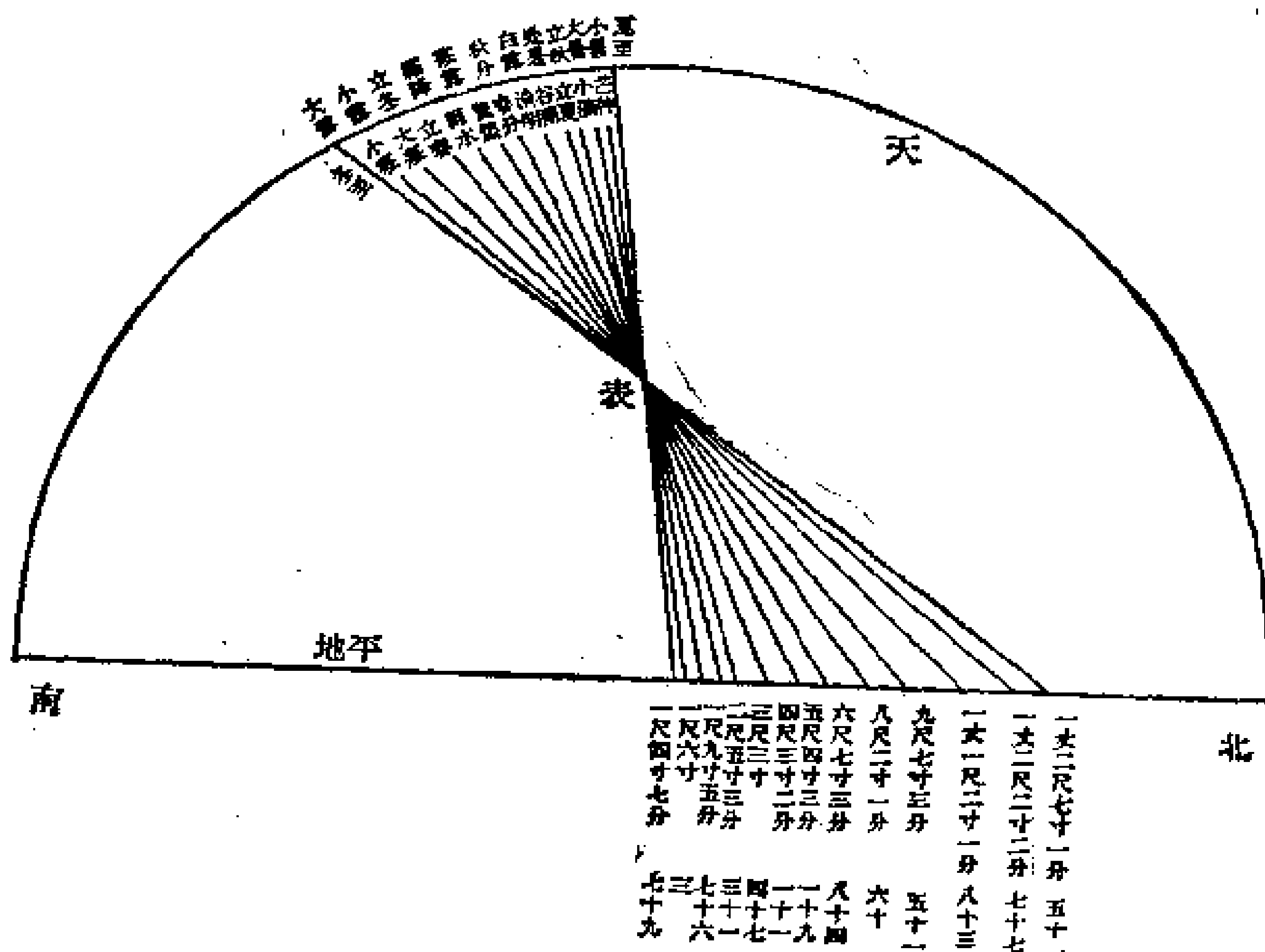
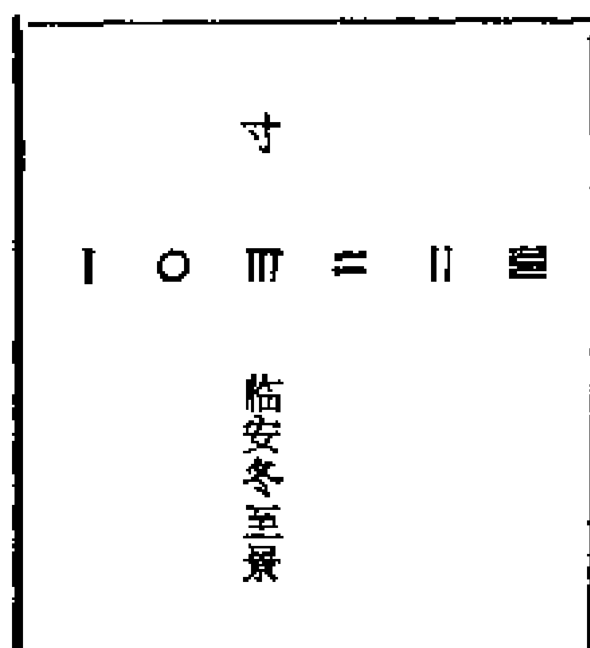
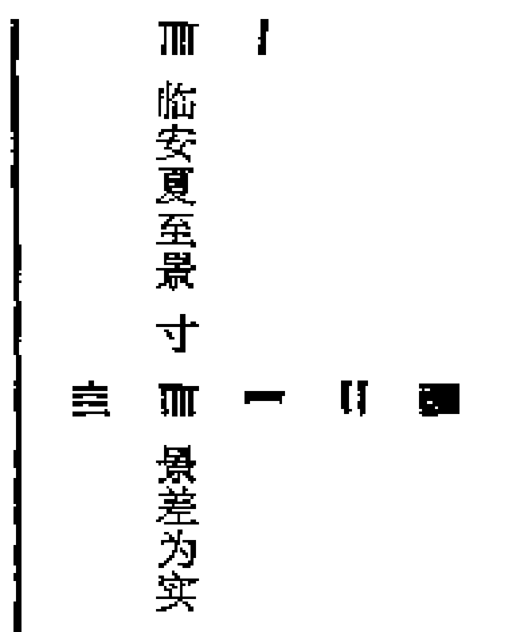


图 2　崇天历阳城晷影图

置临安府所测冬至景一丈八寸二分二十五秒，以夏至景九寸一分减之，余九尺九寸一分二十五秒，为景差，以为实.

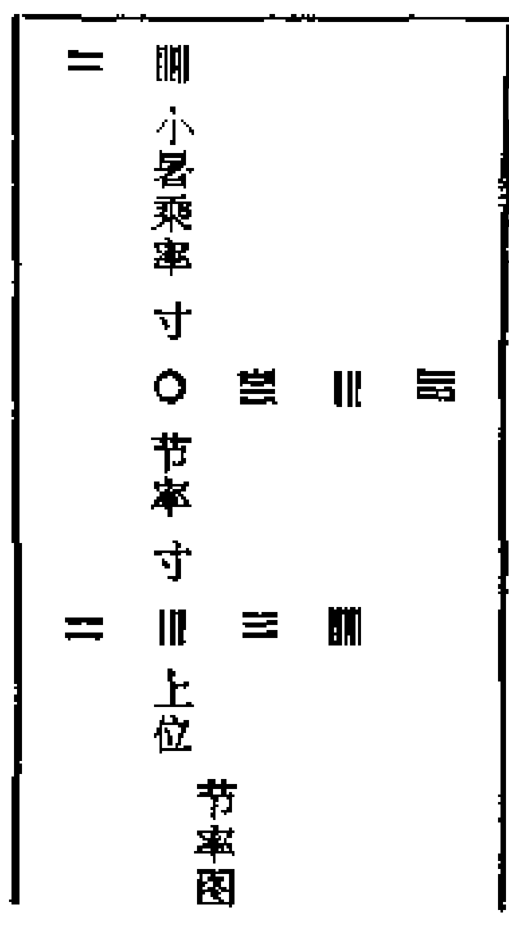




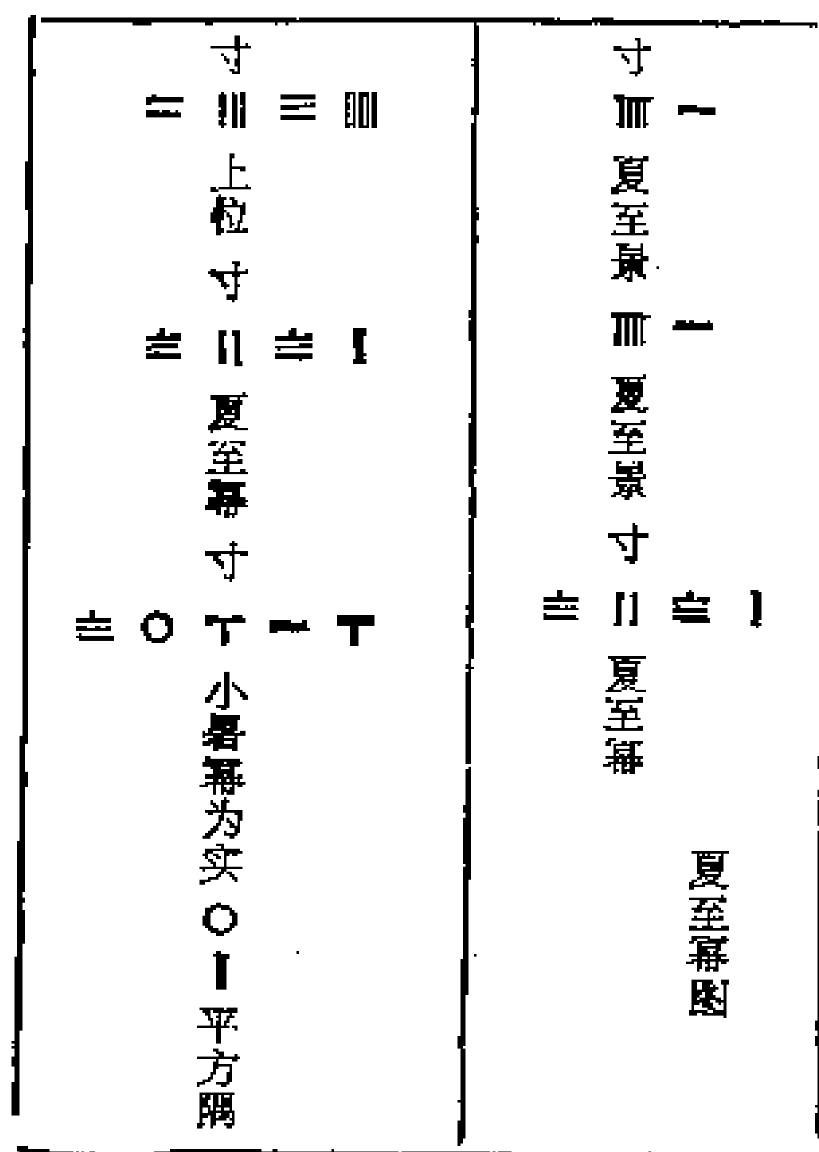
置象限度九十一度三十一分四十四秒，加一十一度二十五分二十七秒五十小分，命度为寸，得一百二寸五千六百七十一分五十秒，为法．以除前差实，得空寸九千六百六十四分四十秒，不尽弃之，自乘，得节泛数九千三百四十分，不尽弃之．

得数	度
得数	象度
寸	度
节泛	法寸
弃数	实寸
寸	寸
节率	得数

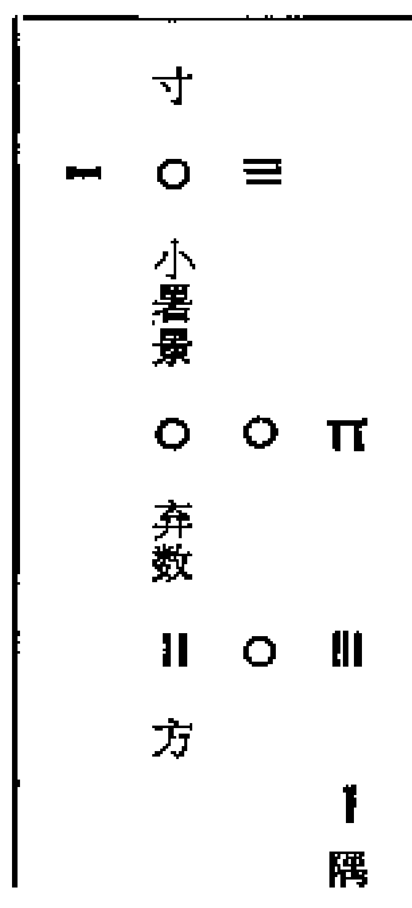
先以小暑节乘率二十五,乘节率九千三百四十分,得二十三寸三千五百分于上.



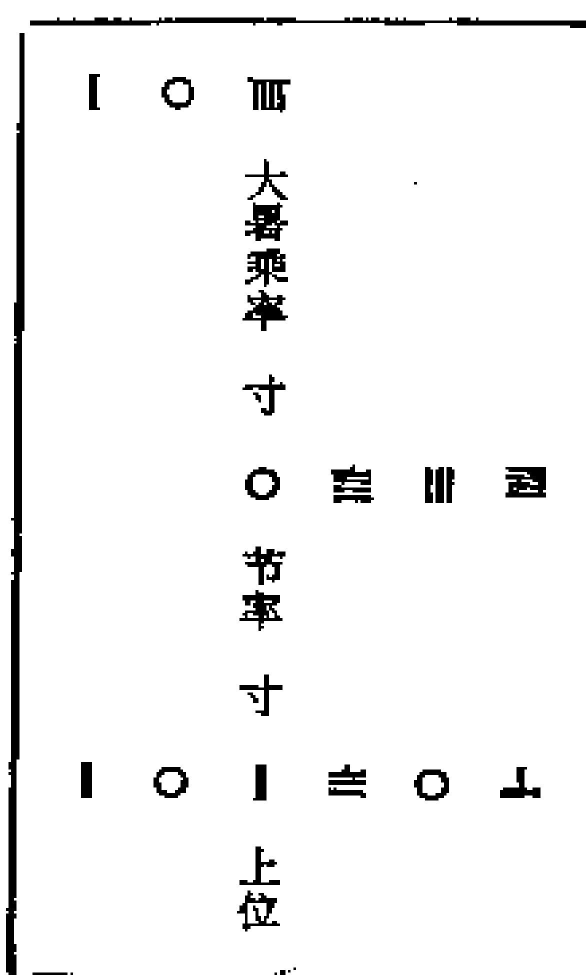
次以临安夏至九寸一分自乘,得八十二寸八千一百分,为夏至幂.



乃以夏至幂，加上，得一百六寸一千六百分，为小暑幂，以为实．以一寸为隅，开平方，得一尺三分，为临安小暑节景．不尽七百分，即寸下七毫，弃之．



又以大暑乘率一百九，乘节率九千三百四十分，得一百一寸八千六十分于上位．



仍以夏至幂八十二寸八千一百分，加上位一百一寸八千六十分，得一百八十四寸六千一百六十分，为大暑幂，以为实．以一寸为隅，开平方，得一尺三寸五分八十七秒，为大暑景．不尽弃之．

寸	寸
大暑景	夏至幂
弃数	寸
方	大暑幂为实
隅	方
	隅

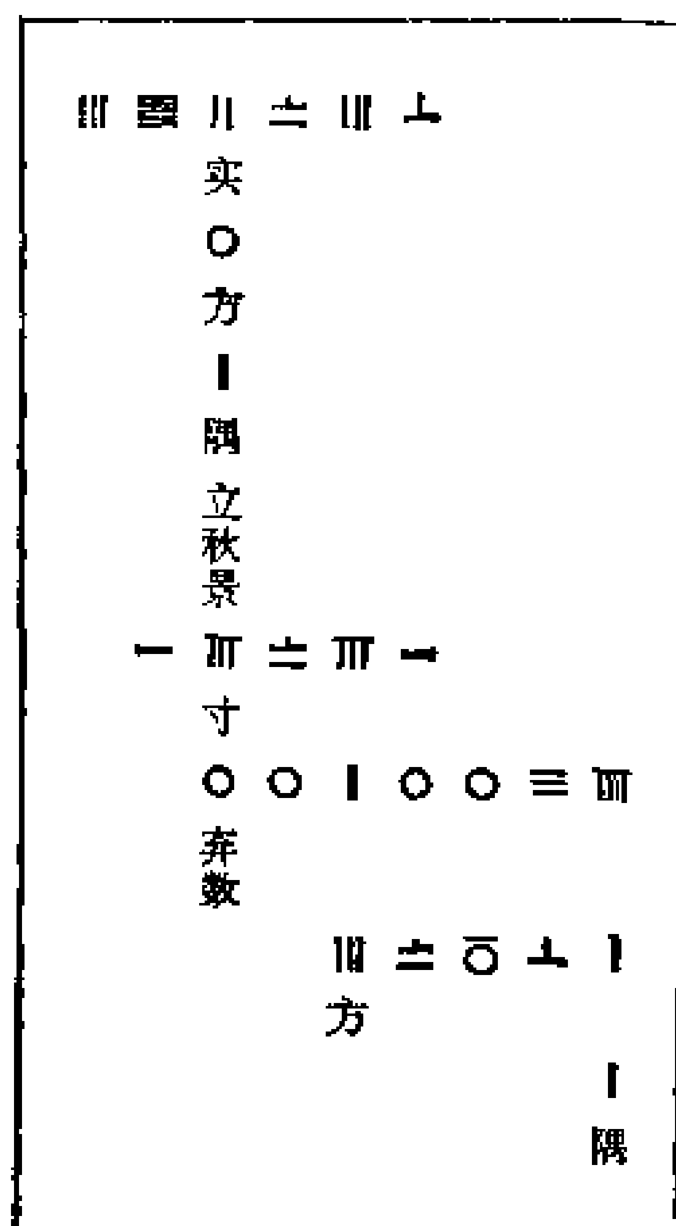
又置立秋乘率二百八十九，乘节率九千三百四十分，得二百六十九寸九千二百六十分于上位．

立秋乘率
寸
节率
寸
上位

仍置夏至幂八十二寸八千一百分，加上位二百六十九寸九千二百六十分，得三百五十二寸七千三百六十分，为立秋幂.



置立秋幂为实，以一寸为隅，开平方，得一尺八寸七分八十一秒，为立秋景．不尽弃之.



乃验阳城夏至景一尺四寸七分七十九秒,在大暑后立秋前,乃置大暑一尺三寸五分八十七秒,并立秋景一尺八寸七分八十一秒,得三尺二寸三分六十八秒,以半之,得一尺六寸一分八十四秒,为大暑后九日景. 又以九日景,并大暑景,得二尺九寸七分七十一秒,以半之,得一尺四寸八分八十五秒半,为大暑后五日景.

𝍩𝍢𝍭𝍧𝍯	𝍩𝍢𝍭𝍧𝍯
大暑景	大暑景
𝍩𝍥𝍩𝍧𝍬	𝍩𝍧𝍯𝍧𝍩
大暑九日景	立秋景
𝍪𝍨𝍯𝍦𝍩	𝍫𝍡𝍫𝍥𝍰
得	得
𝍩𝍣𝍰𝍧𝍭𝍤	𝍩𝍥𝍩𝍧𝍬
大暑后五日景	大暑后九日景

又以大暑景,并五日景,得二尺八寸四分七十二秒半,以半之,得一尺四寸二分三十六秒少,为大暑后三日景.

大暑景

大暑五日景

得

大暑三日景

又以五日景，并三日景，得二尺九寸一分二十一秒太，以半之，得一尺四寸五分六十秒八十七小分，为大暑后四日景。

大暑三日景

大暑五日景

得

大暑四日景

今验阳城夏至景一尺四寸七分七十九秒，为入临安府大暑后四日景一尺四寸五分六十秒太强，乃以四日景减五日景，余三分二十四秒太弱为景差，以十二时除之，得二十七秒五小分二十小秒，为法。

寸 为法	大暑四日景
弃数	大暑五日景
时	景差
	时法

乃置阳城夏至景一尺四寸七分七十九秒，减临安大暑后四日景一尺四寸五分六十秒八小分七十五小秒，余二分一十八秒一十二小分五十小秒，为实，复以法二十七秒五小分二十小秒除之。

实如法而一，得商数八有余，命大暑四日午后数八辰，得大暑五日寅时景，与阳城夏至之日午景等.

[illegible]	[illegible]
实	阳城夏至景
[illegible]	[illegible]
法	临安大暑四日景
而	[illegible]
商	景差为实
[illegible]	
余	
[illegible]	
法	

求较，以大衍历暑景所差，乃置阳城大暑景长一尺九寸五分七十六秒，并阳城立秋景二尺五寸三分三十一秒，得四尺四寸九分七秒，以半之，得二尺二寸四分五十三秒半，为大暑后九日午中景.

一　𝍨　𝍤　𝍦　⊥

阳城大暑景

二　[illegible]　[illegible]　Ⅲ　一

阳城立秋景

[illegible]　[illegible]　[illegible]　〇　⊥

得

二　‖　[illegible]　[illegible]　[illegible]　[illegible]

阳城大暑后九日景

置九日景，复并大暑景一尺九寸五分七十六秒，得四尺二寸二十九秒半，以半之，得二尺一寸一十四秒太，为大暑后五日景。

[illegible] 阳城大暑日景	寸 [illegible] 得数
	[illegible] 半法
[illegible] 阳城大暑后九日景	[illegible] 阳城大暑后五日景

今验开禧历所推临安府大暑后五日午中景一尺四寸八分八十五秒半(原脱"半"字)，与阳城大暑后五日午中景二尺一寸一十四秒太，课之。

[illegible] 阳城大暑后五日景
[illegible] 临安大暑后五日景

乃以临安府五日景,减阳城五日景,差六寸一分二十九秒少(原为"差六寸一分二十九秒太").

寸
𝍥𝍩 𝍡 𝍫 𝍡 𝍱
差

【新释】 设临安府所测冬至影长为 a_1, 夏至影长为 a_2, 象限度为 ϕ_1, 加数为 ϕ_2, 节率为 α, 则

$$\alpha=\left(\frac{a_1-a_2}{\phi_1+\phi_2}\right)^2 \qquad (\alpha)$$

次设小暑节影长为 l_1, 乘率为 k_1, 大暑影长为 l_2, 乘率为 k_2 立秋影长为 l_3, 乘率为 k_3, …, 则

$$l_1=\sqrt{a_2^2+k_1\alpha} \qquad (\beta_1)$$

$$l_2=\sqrt{a_2^2+k_2\alpha} \qquad (\beta_2)$$

$$l_3=\sqrt{a_2^2+k_3\alpha} \qquad (\beta_3)$$

……

又设阳城夏至影长为 a, 若其在临安某二节气的影长之间时, 则用一次内插法以求之.

求得临安某节后某日的影长,与阳城夏至影长相等之后,复求阳城某节后某日之影长,以进行比较,而求出它们所差的尺寸.

【注1】 《新唐书》卷二十八上, 所载大衍历步轨漏术: "……各置其气消息衰,依定气所有日, 每以陟降率陟减降加其分, 满百从衰,各得每日消息衰. 其距二分前后各一气之外, 陟降不等, 皆以三日为限. 雨水初日降七十八, 初限日损一十二, 次限日损八, 次限日损三,次限日损二,次限日损一. 清明初日陟一, 初限日益一,次限日益二,次限日益三, 次限日益八, 末限日益一十九. ……. 自戴日之北一度. ……. 自此起差, 每度增一, 终于二十五度,计增二十六分. 又每度增二,终于四十度,……,各为每度差. ……,为变差. 以加减中晷常数,得每日中晷定数. ……".

该术不仅从实测晷影的数字中考其晷差关系，而且又从太阳所在的不同纬度寻找递差数据，同时给出了各节气实测的阳城中晷定数，并表列各限陟降率等以备查用．确如秦氏所说："历代测景，惟唐大衍历最密"．

【注 2】《宋史》律历志卷七十九，"步晷漏"内所载：求晷影午中定数法是"……．夏至后初限冬至后末限，以百通日内分，自相乘为实，乃置入限分，九因，再折加一十九万八千七十五为法，实如法而一，为分，不满退除为小分，其分满十为寸，寸满十为尺，以加夏至晷影常数，即得所求日午中晷影定数．……．"按开禧历夏至后初限冬后至末限为一百二十日五十三分，兹设入限日分为 m，则得

$$晷差=\frac{12053^2}{\frac{1}{2}(9m+198075)},$$

而所求　　　　晷影定数＝晷差＋0.91 尺

【注 3】关于加数 ϕ_2，个人认为很可能是由纬度的关系而产生的．按《宋史》天文志卷四十八"仪象"内云："……．今测定北极高三十五度，以为常准．……"又"……黄道南北各去赤道二十四度．……．"而二者之差，则适为一十一度．

事实上，秦氏所设的节率乘率，都是以实测数字为依据的（见注 4.）．所以在(α)式中，加数可以不用，即以

$$\alpha=\left(\frac{a_1-a_2}{\phi_1}\right)^2$$

确定节率亦可．或者竟任取一个适当的数 α，作为节率，从而求出乘率，亦无不可．

【注 4】馆案语："……细考图内所载之数，皆与今法颇合，知此悉当时实测所定，非同臆说也．……．各节气影长，皆当时实测所定，本不待求，今所设求法，乃故为溟涬，使人不可解也．细查其数，首以象限加十一度余为法，以除影差，得数自乘为节率，而每节

下又有乘率，以乘率节率相乘，与夏至影幂相加，即为本节影幂，是知节率乃强取之数，盖以此数先除各节影幂，与夏至影幂之较，名为乘率，故以此与节率相乘，加夏至影幂，即各节影幂也．数家设术误人，往往如此．…….”这样的见责秦氏，未免过苛．按秦氏是一位富有创造能力的数学家，他大概发现了历代测景所给的计算方法，都很繁冗，便不安于现成法则的应用．在晷影问题中，他对于这一系列的实测数据，想找出一条简易的变化规律来，于是采用了节率乘率的办法，以使其合于各节气的中晷实测数字．至于其它各日的中晷定数，却应用一次内插法来确定．虽然这个方法，并不十分精密，但若把它作为一个运算公式来说，只要记住夏至影长，节率和十一个乘率，以及

$$l=\sqrt{a_2^2+k\alpha},$$

便可以解决晷影问题了．

【注 5】 古代立晷，系以晷竿八尺指向中天，如图 3，设竿长为 a，x 为太阳过子午线时与晷竿所成的角度，则其影长 y 可以

$$y=a\operatorname{tg}x$$

给出之．

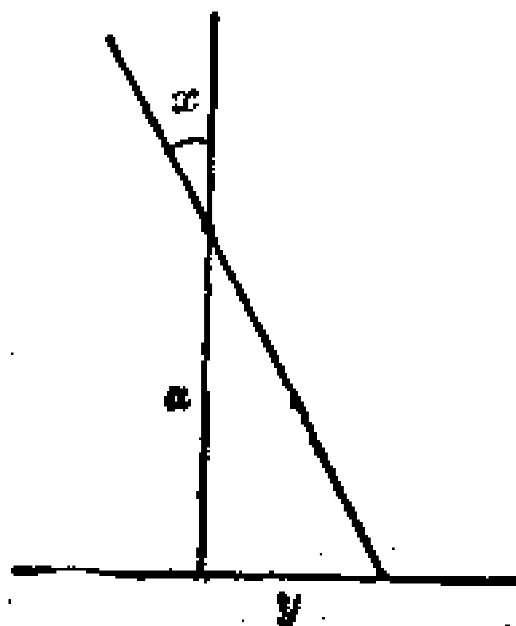


图 3

若取临安府（即今杭州）的纬度为 30°，黄赤交角为 23°·5，竿长为 8 尺，则临安府夏至影长：

$$y_1=8\operatorname{tg}(30°-23°\cdot5)=8\operatorname{tg}6°\cdot5$$
$$=8\times0.11394=0.91\text{ 尺}$$

临安府冬至影长：

$$y_2=8\operatorname{tg}(30°+23°\cdot5)=8\operatorname{tg}53°\cdot5$$
$$=8\times1.3514=10.81\text{ 尺}.$$

【原草】 草曰：置临安府所测冬至景 1 丈 8 寸 2 分 25 秒，以夏至景 9 寸 1 分减之，余 9 尺 9 寸 1 分 25 秒，为景差，以为实．置象度 91 度 31 分 44 秒，加 11 度 25 分 27 秒半，命度为寸，得 102

寸5671分半，为法．除差实，得空寸9664分40秒．以自乘之，得空寸9340分，为节率．先以小暑乘率25乘之，得23寸3500分于上．次以临安夏至景9寸1分，自乘，得82寸8100分，为夏至景幂．以加上，得106寸1600分，为小暑幂．开平方，以1寸为隅开之，得1尺3分，为小暑景．又以大暑乘率109，乘节率9340分，得101寸8060分于上．仍加夏至幂82寸8100分，得184寸6160分，为大暑幂，以为实．以1寸为隅，开平方，得1尺3寸5分87秒，为大暑景．又置立秋乘率289，乘节率9340分，得269寸9260分于上．仍加夏至幂82寸8100分，共得352寸7360，为立秋幂，以为实．以1寸为隅，开平方，得1尺8寸7分81秒，为立秋景．乃验阳城夏至景1尺4寸7分79秒，在大暑后立秋前．乃并大暑立秋二景，半之，得1尺6寸1分84秒，为大暑后九日景．又并大暑景，半之，得1尺4寸8分85秒半，为大暑后五日午中景．又并大暑景，得数半之，得1尺4寸2分36秒少，为大暑后三日景．又并五日景1尺4寸8分85秒半，得数半之，得1尺4寸5分60秒强，为大暑后四日景．验得阳城夏至景入临安大暑后四日，乃以四日景减五日景，余3分24秒太弱，为差．以12时除之，得27秒5小分20小秒，为法．复除阳城景与本日景差2分18秒12小分50小秒，得8命外，为在初五日寅时景等．

求较：以大衍历暑景所差，乃置阳城大暑景长1尺9寸5分76秒，并阳城立秋景2尺5寸3分31秒，得4尺4寸9分7秒，以半之，得2尺2寸4分53秒半，为大暑后九日午中景．复并大暑1尺9寸5分76秒，得4尺2寸29秒半，以半之，得2尺1寸14秒太，为大暑后五日景．以较今开禧历当日景1尺4寸8分85秒半(原脱“半”字)，差少6寸1分29秒少(“少”原为“太”)．合问．

【新释】　已知：$a_1=108.225$寸，$a_2=9.1$寸，$\phi_1=91.3144$度，$\phi_2=11.25275$度，代入(α)式，得

$$a=\left(\frac{108.225-9.1}{91.3144+11.25275}\right)^2=\left(\frac{99.125}{102.56715}\right)^2$$

$$=0.96644^2=0.9340\text{寸}=9340\text{分}.$$

又知: $k_1=25$, $k_2=109$, $k_3=289$, 代入(β_i)各式, 得

$$l_1=\sqrt{9.1^2+25\times0.9340}=\sqrt{82.81+23.35}$$

$$=\sqrt{106.16}=10.3\text{寸},$$

$$l_2=\sqrt{9.1^2+109\times0.9340}=\sqrt{82.81+101.806}$$

$$=\sqrt{184.616}=13.587\text{寸},$$

$$l_3=\sqrt{9.1^2+289\times0.9340}=\sqrt{82.81+269.926}$$

$$=\sqrt{352.736}=18.781\text{寸}.$$

次验阳城夏至影长: $a=14.779$ 寸, 是在临安大暑后立秋前, 因可用一次内插法求之.

临安大暑后九日影长:

$$l_2'=\frac{l_2+l_3}{2}=\frac{13.587+18.781}{2}=16.184\text{寸},$$

临安大暑后五日影长:

$$l_2''=\frac{l_2+l_2'}{2}=\frac{13.587+16.184}{2}=14.8855\text{寸},$$

临安大暑后三日影长:

$$l_2'''=\frac{l_2+l_2''}{2}=\frac{13.587+14.8855}{2}=14.23625\text{寸},$$

临安大暑后四日影长:

$$l_2^{(4)}=\frac{l_2'''+l_2''}{2}=\frac{14.23625+14.8855}{2}=14.560875\text{寸}.$$

复因 $l_2^{(4)}<a<l_2''$, 乃求辰数. 设所求辰数为x, 则

$$\frac{x}{12}=\frac{a-l_2^{(4)}}{l_2''-l_2^{(4)}},$$

$$\therefore\quad x=\frac{a-l_2^{(4)}}{\dfrac{l_2''-l_2^{(4)}}{12}}=\frac{0.218125}{0.027052}=8\text{辰}.$$

即阳城夏至影长与临安大暑后五日寅时影等.

次求阳城大暑后五日影长与临安大暑后五日影长之差，已知阳城大暑影长：$p=19.576$ 寸，立秋影长：$p_3=25.331$ 寸，于是得

阳城大暑后九日影长：

$$p_2'=\frac{p_2+p_3}{2}=\frac{19.576+25.331}{2}=22.4535\text{ 寸},$$

阳城大暑后五日影长：

$$p_2''=\frac{p_2+p_2'}{2}=\frac{19.576+22.4535}{2}=21.01475\text{ 寸},$$

∴　大暑后五日影差：

$$d=p_2''-l_2''=21.01475-14.8855$$
$$=6.12925\text{ 寸}=6\text{寸}1\text{分}29\text{秒少}.$$

15. 天 池 测 雨

问今州郡都有天池盆，以测雨水．但知以盆中之水为得雨之数，不知器形不同，则受雨多少亦异，未可以所测，便为平地得雨之数．假令盆口径二尺八寸，底径一尺二寸，深一尺八寸，接雨水深九寸．欲求平地雨降几何?

答曰：平地雨降三寸.

术曰：盆深乘底径，为底率．二径差乘水深，并底率，为面率．以盆深为法，除面率，得面径．以二率相乘，又各自乘，三位并之，乘水深为实．盆深乘口径，以自之，又三因，为法．除之，得平地雨深.

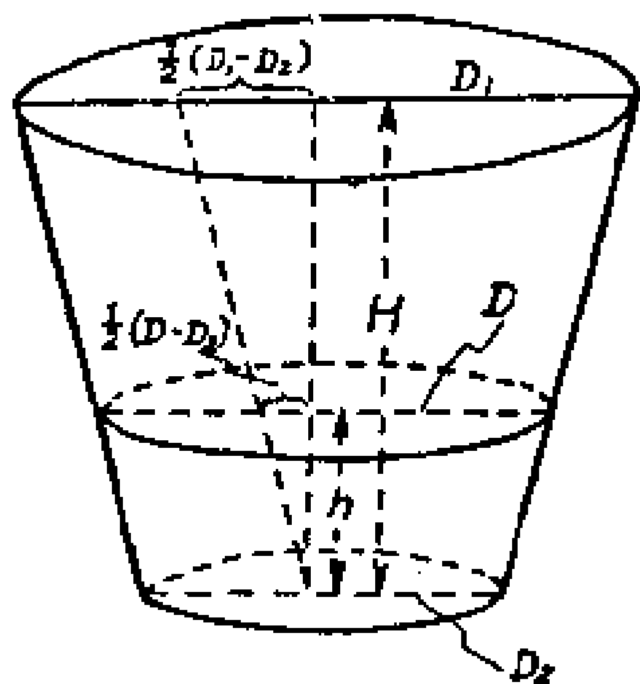


图　4

【新释】　设口径为 D_1，底径为 D_2，水面径为 D，盆深为 H，水深为 h，如图 4，由比例关系，得

$$\frac{1}{2}(D_1-D_2):H=\frac{1}{2}(D-D_2):h,$$

化简，得水面径：

$$D=\frac{(D_1-D_2)h+HD_2}{H} \tag{α}$$

又设雨量的体积为 v，由圆锥台体积公式，得

$$v=\frac{1}{12}\pi h(D^2+D_2^2+DD_2) \tag{β}$$

将(α)式代入(β)式，得

$$v=\frac{1}{12H^2}\pi h\{[(D_1-D_2)h+HD_2]^2+(HD_2)^2 +HD_2[(D_1-D_2)h+HD_2]\} \tag{γ}$$

但接受雨水之面，其径为 D_1，故应化为以 D_1 为直径的圆柱体体积，而所求圆柱体的高 x，便是平地雨深. 由圆柱体体积公式，得

$$v=\frac{1}{4}\pi D_1^2x \tag{δ}$$

解(γ)，(δ)二式，得

$$x=\frac{h}{3(HD_1)^2}\{[(D_1-D_2)h+HD_2]^2+(HD_2)^2 +HD_2[(D_1-D_2)h+HD_2]\} \tag{ε}$$

【原草】 草曰：以盆深及径，皆通为寸，盆深得 18 寸，底径得 12 寸，相乘，得 216 寸，为底率. 置口径 28 寸，减底径 12 寸，余 16 寸，为差，以乘水深 9 寸，得 144 寸，并底率 216 寸，得 360 寸，为面率. 以盆深 18 寸为法，除面率，得 20 寸，展为 2 尺，为水面径. 以底率 216 寸，乘面率 360 寸，得 77760 寸于上. 以底率 216 寸自乘，得 46656 寸，加上，又以面率 360 自乘，得 129600，并上，共得 254016，以乘水深 9 寸，得 2286144 寸，为实. 以盆深 81 寸，乘口径 28 寸，得 504 寸，自乘，得 254016 寸，又三因，得 762048 寸，为法. 除实，得 3 寸，为平地雨深. 合问.

【新释】 已知：$D_1=28$ 寸，$D_2=12$ 寸，$h=9$ 寸，$H=18$ 寸，代

入(e)式，得

$$x=\frac{9}{3(18\times28)^2}\{[(28-12)\times9+18\times12]^2+(18\times12)^2+18\times12\times[(28-12)\times9+18\times12]\}$$

$$=\frac{9}{762048}\{[144+216]^2+216^2+216\times[144+216]\}$$

$$=\frac{9}{762048}\{129600+46656+77760\}$$

$$=\frac{9\times254016}{762048}=3\text{ 寸}.$$

16. 圆罂测雨

问以圆罂接雨，口径一尺五分，腹径二尺四寸，底径八寸，深一尺六寸，并里明接得雨一尺二寸．圆法用密率，问平地雨水深几何？

答曰：平地水深一尺八寸．七万四千八十八分寸之六万四千四百八十三．

术曰：底径与腹径相乘，又各自乘，并之，乘半罂深，以一十一乘之，为下率．以四十二为下法，除得下积．以半罂深并雨深，减元罂深，余为上深．以口径减腹径，余乘上深，为次．以半罂深乘口径，加次，为面率．以半深除面率，得水径面．以半深乘腹径，为腹率．置面率，与腹率相乘，又各自乘，并之，以一十一乘之，为上率．以半深自乘，为幂，以乘下法，为上法，上法除上率，得上积．半深幂乘下率，并上率，为总实．口径幂乘上法，为总法．除实，得平地雨高．

草曰：置底径 8 寸，与腹径 24 寸相乘，得 192 寸于上．又底径 8 寸自乘，得 64 寸，加上，又腹径 24 寸自乘，得 576 寸，并上，共得 832 寸，以乘半罂深 8 寸，得 6656 寸，又以 11 乘之，得 73216 寸，为下率．置密率法 14，以所并 3 因之，得 42，为下法．以半深 8 寸，并雨深 12 寸，得 20 寸，以减元深 16 寸，余 4 寸，为上深．以口径 10 寸 5 分，减腹径 24 寸，余 13 寸 5 分，以乘上深 4 寸，得 54

寸，为次．以半罂深8寸，乘口径10寸5分，得84寸，加次，共得133寸，为面率．以半深8寸，乘腹径24寸，得192寸，为腹率．置面率138寸，与腹率192寸，相乘，得26496寸于上．又以面率138寸自乘，得19044，加上，又以腹率192寸自乘，得36864，并上，共得82404寸，以11乘之，得906444寸，为上率．以半深8寸自乘，得64寸，为半深幂．以乘下法42，得2688，为上法．以半深幂64寸，乘下率73216寸，得4685824寸，并上率906444，共得5592264寸，为总实．以口径10寸5分自乘，得110寸2分5厘，以乘上法2688寸，得296352寸，为总法．除实，得1尺8寸，不尽257932，与法求等，得4，俱约之，为1尺8寸74088分寸之64483，为平地雨深．合问．

本问术草答案俱误，兹更正如次：

答曰：平地水深三尺五寸一千三百二十三分寸之九百二十．

术曰：底径与腹径相乘，又各自乘，并之，乘半罂深，以11乘之，为下率．以42为下法，除得下积．以半罂深并雨深，减元罂深，余为上深．以口径减腹径，余乘上深为次．以半罂深乘口径，加次，为面率．以半深除面率，得水面径．以半深乘腹径，为腹率．置面率，与腹率相乘，又各自乘，并之，以11乘之，又乘上深（原脱“又乘上深”四字），为上率．以半深自乘，为幂．以乘下法，为上法．上法除上率，得上积．半深幂乘下率，并上率，为总实．口径幂乘半深幂，又以33乘之，为总法（原为“口径幂乘上法，为总法”）．除实，得平地雨高．

【注】　馆案云：“此术有二误，法实皆当用圆幂，或皆用方幂，今以圆幂乘实，方幂乘法，法实不同类，一误也．罂内雨，自腹径截之，为两圆台体，下高八寸，上高四寸，于下体，并三幂以高乘之；于上体，只并三幂，未以高乘之，二误也．……”．且其改正术数，均与此处所修改者同．

【新释】　如图5，设口径为D_1，腹径为D_2，底径为D_3，罂深

为 H, $\pi=\dfrac{22}{7}$, 则下积

$$v_1=\frac{1}{12}\pi(D_2^2+D_3^2+D_2D_3\cdot\frac{H}{2}$$

$$=\frac{11(D_2^2+D_3^2+D_2D_3)\cdot\frac{H}{2}(\text{下率})}{42(\text{下法})} \qquad (\alpha)$$

次设雨深为 h, 则上深

$$h'=\frac{H}{2}+h-H \qquad (\beta)$$

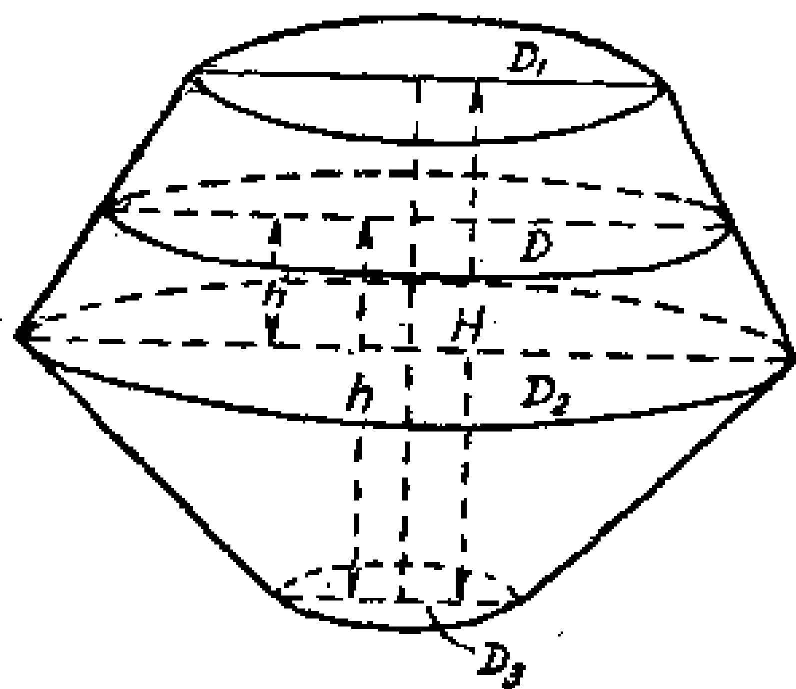


图　5

复设水面径为 D, 则有

$$D=\frac{\frac{H}{2}\cdot D_2-(D_2-D_1)h'}{\frac{H}{2}} \qquad (\gamma')$$

或

$$D=\frac{(D_2-D_1)h'+\frac{H}{2}\cdot D_1}{\frac{H}{2}} \qquad (\gamma)$$

(γ')式是一般情形, (γ)式是秦氏应用的公式. 它在 $h'=\dfrac{H}{4}$ 的特殊情形下, 才能成立.

又设上积为 v_2, 则

$$v_2=\frac{1}{12}\pi(D_2^2+D^2+DD_2)h'$$

$$=\frac{11h'}{42\left(\frac{H}{2}\right)^2}\left\{\left(\frac{H}{2}\cdot D_2\right)^2+\left[(D_2-D_1)h'+\frac{H}{2}D_1\right]^2\right.$$

$$\left.+\frac{H}{2}D_2\left[(D_2-D_1)h'+\frac{H}{2}D_1\right]\right\} \qquad (\delta)$$

罂中接雨总量为 $v=v_1+v_2$，接雨面径为 D_1，化为圆柱体体积，而其高 x，便是平地雨深．由圆柱体体积公式，得

$$v=\frac{1}{4}\pi D_1^2 x \qquad (\varepsilon)$$

由 (α)，(δ)，(ε) 各式，得

$$\frac{11}{14}D_1^2 x=\frac{\left(\frac{H}{2}\right)^2\times\text{下率}+\text{上率}}{42\left(\frac{H}{2}\right)^2}$$

即

$$x=\frac{\left(\frac{H}{2}\right)^2\times\text{下率}+\text{上率}}{33D_1^2\left(\frac{H}{2}\right)} \qquad (\zeta)$$

【原草】草曰：置底径 8 寸，与腹径 24 寸相乘，得 192 寸于上．又底径 8 寸自乘，得 64 寸，加上，又腹径 24 寸自乘，得 576 寸，并上，共得832 寸，以乘半罂深 8 寸，得 6656寸，又以 11 乘之，得 73216 寸，为下率．置密率法 14，以 3 因之，得 42，为下法．以半深 8 寸，并雨深 12 寸，得 20 寸，以减元深 16 寸，余 4 寸，为上深．以口径 10 寸 5 分，减腹径 24 寸，余 13 寸 5 分，以乘上深 4 寸，得 54 寸，为次．以半罂深 8 寸，乘口径 10 寸 5 分，得 84 寸，加次，共得 138 寸，为面率．以半深 8 寸，乘腹径 24 寸，得 192 寸，为腹率．置面率 138 寸，与腹率 192 寸相乘，得 26496 寸于上．又以面率 138 寸自乘，得 19044，加上，又以腹率 192 寸自乘，得 36864，并上，共得 82404 寸，以 11 乘之，得 906444 寸，又以上深 4 寸乘之，得 3625776，为上率．以半深 8 寸自乘，得 64 寸，为半深幂．以乘下法 42，得 2688，为上法．以半深幂 64 寸，乘下率 73216 寸，得 4685824 寸，并上率 3625776，共得 8311600 寸，为总实．以口径 10 寸 5 分自乘，得 110 寸 2 分 5 厘，以乘半深幂 64，又以 33 乘之，得 232848 寸，为总法．除实，得 3 尺 5 寸．不尽 161920，与法求等，得 176，

俱约之，为3尺5寸1323分寸之920，为平地雨深．合问．

【新释】 已知：$D_1=10.5$ 寸，$D_2=24$ 寸，$D_3=8$ 寸，$H=16$ 寸，代入(α)式，得下积：

$$v_1=\frac{11(24^2+8^2+24\times 8)\cdot\frac{16}{2}}{42}=\frac{73216(\text{下率})}{42(\text{下法})}.$$

又 $h=12$ 寸，故上深：

$$h'=\frac{16}{2}+12-16=4\text{ 寸}.$$

由(γ)式，得水面径：

$$D=\frac{(24-10.5)\times 4+8\times 10.5}{8}=\frac{138(\text{面率})}{8(\text{半罌深})}$$

由(δ)式，得上积：

$$\begin{aligned}v_2&=\frac{11\times 4}{42\times 8}\{(8\times 24)^2+[13.5\times 4+8\times 10.5]^2\\&\quad+8\times 24[13.5\times 4+8\times 10.5]\}\\&=\frac{44\{36864+19044+26496\}}{2688}\\&=\frac{3625776(\text{上率})}{2688(\text{上法})}\end{aligned}$$

由(ζ)式，得平地雨深：

$$\begin{aligned}x&=\frac{64\times 73216+3625776}{33\times 110.25\times 64}=\frac{8311600}{232848}=35\frac{161920}{232848}\\&=35\frac{920}{1323}=3\text{ 尺 }5\frac{920}{1323}\text{ 寸}.\end{aligned}$$

17. 峻积验雪

问验雪占年，墙高一丈二尺，倚木去址五尺，梢与墙齐，木身积雪厚四寸，峻积薄，平积厚．欲知平地雪厚几何？

答曰：平地雪厚一尺四分．

术曰：以少广求之，连枝入之，以去址自乘，为隅，以墙高自乘，

并隅于上，以雪厚自之，乘上，为实．可约者，约而开之。开连枝平方，得地上雪厚．

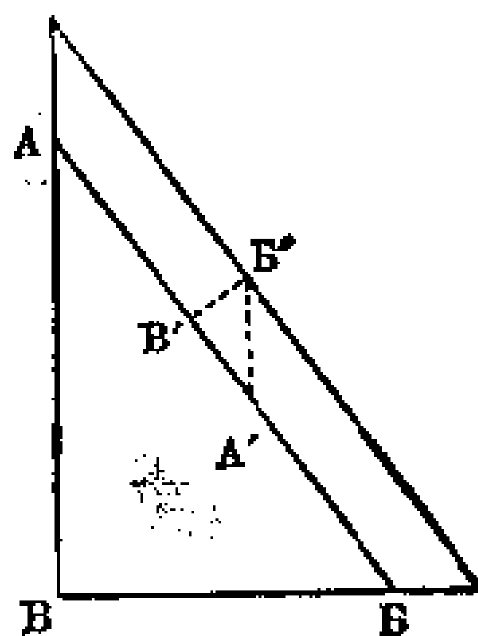


图 6

【新释】 设墙高为 AB，去址为 $BБ$，则木长幂：

$$AБ^2=AB^2+BБ^2.$$

又因：　$\triangle AБB \backsim \triangle A'Б'B'$，

$$\therefore\quad \frac{A'Б'}{B'Б'}=\frac{AБ}{BБ}.$$

由图 6 可知，所求平地雪厚：$x=A'Б'$，因得

$$\overline{BБ}^2x^2=(\overline{AB}^2+\overline{BБ}^2)\overline{B'Б'}^2 \qquad (\alpha)$$

【原草】 草曰：以问数皆通为寸，置去址 50 寸自乘，得 2500，为隅．以墙高 120 寸自乘，得 14400 寸，并隅．得 16900 寸于上．以雪厚 4 寸自之，得 16，乘上，得 270400 寸，为实．开连枝平方，今隅实可求等，得 100，俱约之，得 2704 为实，得 25 为隅，开平方，得 10 寸 4 分，展为 1 尺 4 分，为平地雪厚．合问．

【新释】 已知：$AB=12$ 尺，$BБ=5$ 尺，$B'Б'=4$ 寸，代入(α)式，得

$$2500x^2=270400$$

$$25x^2=2704.$$

或

$$\begin{array}{rrr|l}
25+ & 0 & -2704 & \\
 & 250 & +2500 & 10 \\
\hline
25+ & 250 & -\ \ 204 & \\
 & 250 & & \\
\hline
25+ & 500 & -\ \ 204 & \\
 & 10 & +\ \ 204 & 0.4 \\
\hline
25+ & 510 & +\ \ \ \ 0 &
\end{array}$$

因得：　$x=10.4$ 寸$=1$ 尺 4 分．

18. 竹器验雪

问以圆竹箩验雪，箩口径一尺六寸，深一尺七寸，底径一尺二

寸，雪降其中，高一尺。箩体通风，受雪多，则平地少．欲知平地雪高几何？

答曰：平地雪厚九寸．三千四百十九分寸之七百六十四。

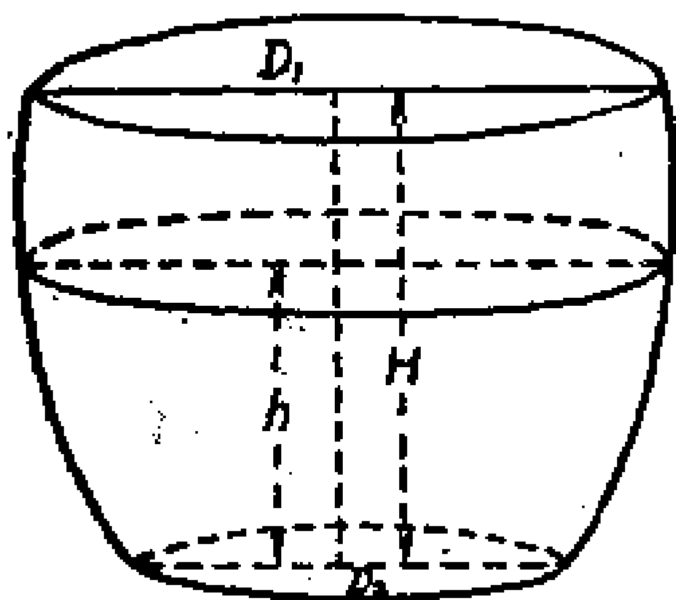


图 7

术曰：口径减底径，余乘雪深，半之自乘，为隅．以箩深幂乘雪深幂，并隅，又乘雪深幂，为实．隅实可约，约之。开连枝三乘方，得平地雪厚．

【新释】 如图 7，设口径为 D_1，底径为 D_2，箩深为 H，雪深为 h，秦氏所给的求平地雪高 x 的近似值公式为

$$\left[\frac{(D_1-D_2)h}{2}\right]^2 x^4-h^2\left\{h^2H^2+\left[\frac{(D_1-D_2)h}{2}\right]^2\right\}=0 \quad (\alpha)$$

【注】 沈钦裴氏曾按圆锥台的求积公式作过改正．但秦氏所指的圆竹箩，是否为圆锥台，很成问题，这是因为如果竹箩是圆锥台时，由“天池测雨”可知，秦氏已能应用圆锥台求积公式，便不必另设公式以求雪高．因此我觉得这里所说的竹箩，决不是圆锥台，而是某一个曲线段的旋转曲面．这时因为没有现成的法则可以应用，于是秦氏便根据少数竹箩的实测数字，创拟了(α)式，以使之符合于范围很狭隘的实测数据．不过在这里秦氏没有说出曲线段的具体情况，我们不便于推测(α)式的理论根据吧了．

【原草】 草曰：列问数，各通为寸，置口径 16 寸，减底径 12 寸，余 4 寸，乘雪深 10 寸，得 40 寸，以半之，得 20 寸，自乘，得 400 寸，为隅．以箩深 17 寸自乘，得 289 寸，为箩深幂．次置雪深 10 寸自乘，得 100 寸，为雪深幂．以乘箩深幂数，加隅，又乘深幂．得 293 万寸，为实．隅实求等，得 400，俱约之，得 7325，为实．得 1 为隅，开三乘方，步法不可超，乃约实，置商 9 寸，与隅 1 相生，得 9，为下

廉．又与商相生，得 81 寸，为上廉．又与商相生，得 729，为从方，乃命上商，除实，不尽 764，已而复以商生隅，入二廉，至方，陆续又生毕，以方廉隅共并之，得 3439 分寸之 764，为平地雪厚 9 寸 3439 分寸之 764，合问．列问数，各通为寸，口径得 16 寸，深 17 寸，底径 12 寸，篓中雪高 10 寸．

𝍩𝍥 篓口径
𝍩𝍡 篓底径
𝍩𝍦 篓深
𝍩〇 篓中雪高

乃以底径减口径，余 4 寸，乘雪深 10 寸，得 40 寸．

𝍪〇 得	𝍬〇 得	𝍣 余
𝍪〇	𝍡	
𝍣〇〇 隅	𝍪〇 得	𝍩〇 篓中雪高

以半得数 20 寸自乘，得 400 寸，为隅． 以箩深 17 寸自乘，得 289 寸，为箩深幂．

箩深　一 ╥
箩深　一 ╥
箩深幂　‖ ≐ ╨

次置雪深 10 寸自乘，得 100，为雪深幂．

雪深　一 ○
雪深　一 ○
雪深幂　| ○ ○

以雪深幂 100 寸，乘箩深幂 289 寸，得 28900 寸，并隅 400 寸，得 29300 寸，为上．

丨 〇 〇 雪深幂

‖ 𝍧 𝍫 竿深幂

‖ 𝍨 𝍫 〇 〇 得数

𝍮 〇 〇 隅

‖ 𝍨 𝍫 〇 〇 上

置上位数 29300 寸，又乘雪深幂 100 寸，得 293 万寸，为实，开三乘方。

‖ 𝍨 ||| 〇 〇 上位

丨 〇 〇 雪深幂寸

‖ 𝍨 ||| 〇 〇 〇 〇 实

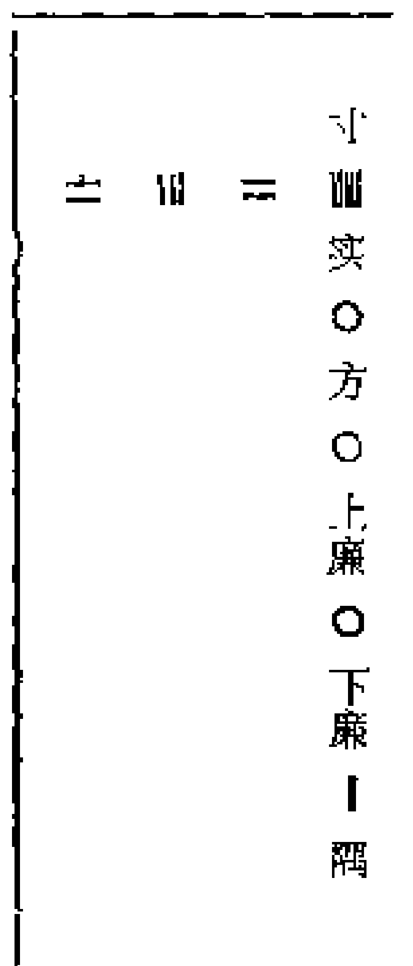
〇 方

〇 上廉

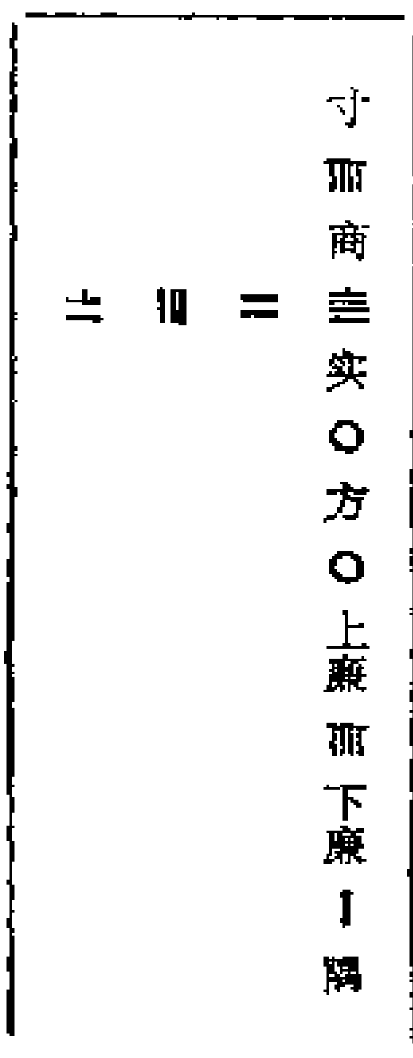
〇 下廉寸

𝍮 〇 〇 隅

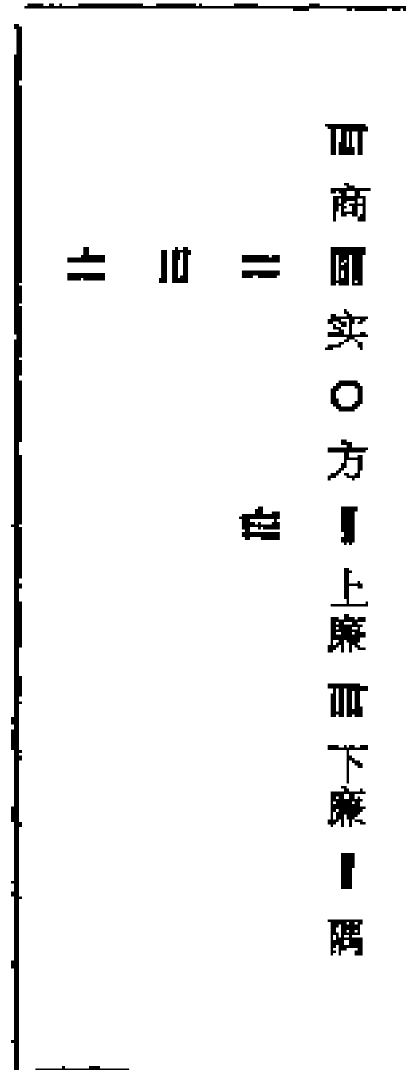
以隅实求等，得 400，俱为约之，得 7325，为实、1 为隅，开之.



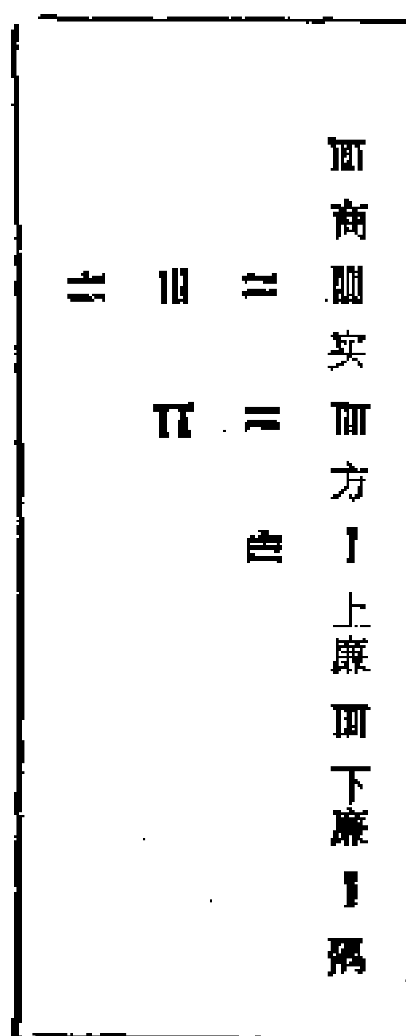
步法不可超，乃约实，置商 9 寸，与隅相生，得 9，为(原脱"为"字)下廉.



下廉 9，又与商 9 相生，得 81，为上廉.



上廉又与商相生，得 729，为从方.



乃以从方 729，命上商 9，除实 7325 讫，实余 764，既而复以商生隅，入下廉.

商
实余
方
上廉
下廉
隅

下廉得 18，又与商 9 相生，入上廉.

商
实
方
上廉
下廉
隅

商
实
方
上廉
下廉
隅

上廉得 243，又以商相生，入方，得 2916。

位	数
商	9
实余	763
方	2916
上廉	243
下廉	18
隅	1

又以商 9 生隅 1，入下廉 18 内，得 27。

位	数	末图
商	9	9
实	763	763
方	2916	2916
上廉	[illegible]	[illegible]
下廉	18	27
隅	1	1

又以商 9 生下廉 27，入上廉 243 内，得 486．又以商生隅，入下廉 27 内，得 36，为末图．乃以末图方廉隅四者并之，得 3439，为母．以实余 764，为子．

雪厚寸 〇 商 𝍨 实余 𝍦 方廉隅

子 𝍮 ⊥ 𝍦

母 ≡ 𝍣 ≡ 𝍨

命为平地雪厚 9 寸 3439 分寸之 764．合问．

【新释】 已知：$D_1=16$ 寸，$D_2=12$ 寸，$H=17$ 寸，$h=10$ 寸，代入(α)式，得

$$400x^4-2930000=0$$

或

$$x^4-7325=0.$$

解之，其草式如次：

$$\begin{array}{r|l}
1+\ 0+\ \ 0+\ \ 0-7325 & \\
9+\ 81+729+6561 & 9 \\
\hline
1+\ 9+\ 81+729-764 & \\
9+162+2187 & \\
\hline
1+18+243+2916 & \\
9+243 & \\
\hline
1+27+486 & \\
9 & \\
\hline
1+36+486+2916-764 &
\end{array}$$

因得：
$$x=9\frac{764}{1+36+486+2916}=9\frac{764}{3439}\ \text{寸}.$$

第三章　田　域　类

由“尖田求积”“均分梯田”“环田三积”各问中，可以看到：秦氏已将古代的带从开方术，发展为正负开方术而应用到高次方程中去了，其术与和涅(Horner)氏1819年所发表的方法完全相同，然而秦氏却早了五百七十余年．在“尖田求积”中，详细地列举了翻法开方的运算过程，同时给出了“商常为正，实常为负；从常为正，益常为负．”的具体规定，而且该问又例示了换骨开方的情形，这和第四章“古池推元”中的投胎开方，是同样富有参考价值的例题．

在“三斜求积”一问中，秦氏创造了已知三边的三角形面积公式：

$$A=\sqrt{\frac{a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}{4}},$$

这和海伦(Heron)氏的求积公式

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

是完全相似的．式中

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

“蕉田求积”中，秦氏创立了弓形面积的近似值公式

$$x^2+\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]x-10(a+b)^3=0$$

式中 $x=2A$．较之《九章算术》中的

$$A\doteq\frac{1}{2}(ab+b^2),$$

稍为精密了一些，但与近代的弓形面积公式

$$A=\frac{2}{3}ab$$

相较，仍嫌粗略.

"均分梯田"的答案中，秦氏又采用了百分命数法.

"环田三积"中，应用了 $\pi=\sqrt{10}$，给出了直径 d，圆周 c 和圆面积 A 之间的非常整齐的关系式

$$A^2=\frac{d^2c^2}{16}=\frac{10d^4}{16}=\frac{c^4}{10\times16}.$$

"围田先计"一问中，求溪面泛高部分，秦氏似乎是假定在一年八节(《周髀算经》以"二至""二分""四立"为八节)中，平均每节可满荡一次，而遏出水则是按全年各日平均复溪入湖的. 严格说来，泛高亦应与湖水面积的大小有关，因此这里的溪面泛高，是一个仅供参考的近似值，而不能作为一般的情形.

第五卷　凡　六　问

19. 尖 田 求 积

问有两尖田一段，其尖长不等，两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步. 欲知其积几何?

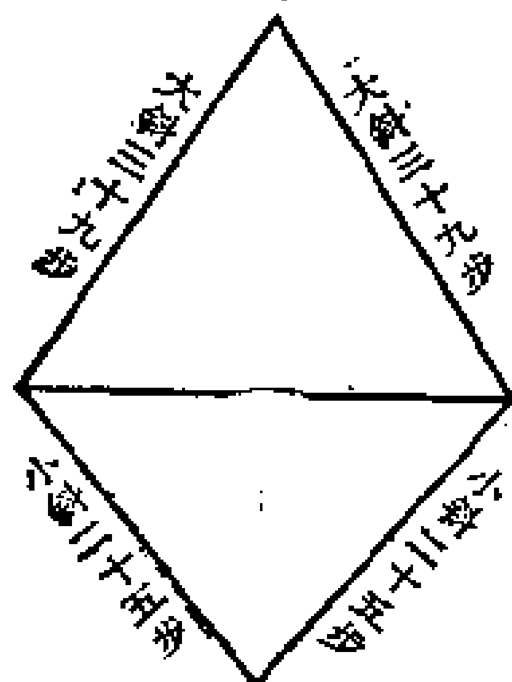


图 8　尖田步

答曰：田积八百四十步.

术曰：以少广求之，翻法入之. 置半广自乘，为半幂. 与小斜幂相减相乘，为小率. 以半幂与大斜幂相减相乘，为大率. 以二率相减，余自乘，为实. 并二率，倍之，为从上廉，以一为益隅，开翻法三乘方，得积. 一位开尽者，不用翻法。

【新释】 设大斜为 a，小斜为 b，中广为 c，并设大斜与中广所围成的面积为 A_1，小斜与中广所围成的面

积为 A_2, 则

$$A_1=\frac{c}{2}\sqrt{a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2},$$

$$A_2=\frac{c}{2}\sqrt{b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

复设所求的面积为 x, 则

$$x=A_1+A_2=\frac{c}{2}\left(\sqrt{a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}\right).$$

两端平方, 得

$$x^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2\left(\sqrt{a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+2\sqrt{a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}\right].$$

移项, 得

$$x^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2+b^2-2\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\left(\frac{c}{2}\right)^2\sqrt{a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

两端再平方, 化简得

$$-x^4+2\left\{\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]+\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\right\}x^2$$

$$-\left\{\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\right\}^2$$

$$=0$$

或

$$-x^4+2\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2+b^2-2\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]x^2$$
$$-\left(\frac{c}{2}\right)^4(a^2-b^2)^2=0 \qquad (\alpha)$$

【原草】 草曰：置广30步，以半之，得15，以自乘，得225，为半幂．以小斜25步自乘，得625，为小斜幂．与半幂相减，余400，与半幂225相乘，得9万步，为小率．置大斜39步自乘，得1521，为大斜幂．与半幂225相减，余1296，与半幂225相乘，得291600，为大率．以小率9万减大率，余201600，自乘，得4064256万，为实．以小率9万，并大率291600，得381600，倍之，得763200，为从上廉．以1为益隅，开玲珑翻法三乘方．步法，乃以从廉超一位，益隅超三位，约商得十，今再超进，乃商置百．其从上廉为763200万，其益隅为1亿，约实，置商800，为定商．以商生益隅，得8亿，为益下廉．又以商生下廉，得64亿，为益上廉．与从上廉763200万相消，从上廉余123200万，又与商相生，得985600万，为从方．又与商相生，得7884800万，为正积．与元实4064256万相消，正积余3820544万，为正实．又以益隅1亿，与商相生，得8亿，增入益下廉，为16亿，又以益下廉与商相生，得128亿，为益上廉．乃以益上廉与从上廉123200万相消，余1156800万，为益上廉．又与商相生，得9254400万，为益方．与从方985600万相消，益方余8268800万，为益方．又以商生益隅1亿．得8亿．增入益下廉得24亿．又以商相生．得192亿入益上廉，得3076800万，为益上廉．又以商生益隅1亿，得8亿，入益下廉，得32亿毕．其益方一退，为826880万，益上廉再退，得30768万，益下廉三退，得320万，益隅四退，为1万毕．乃约正实，续置商40步，与益隅1万相生，得4万，入益下廉，为324万，又与商相生，得1296万，入益上廉内，为32064万，又与商相生，得128256万，入益(原书"益"误为"从")方内，为955136万，乃命上续商40，除实适尽．所得840

步，为田积．今列求率开方图于后：

中广之步

半广

自乘

半幂

小斜

自乘

小斜幂

半幂

相减

小斜幂

余

相乘

半幂

小率

大斜

自乘

大斜幂

相减

余

相乘

半幂

大率

大率

相减

小率

余

自乘为实

余

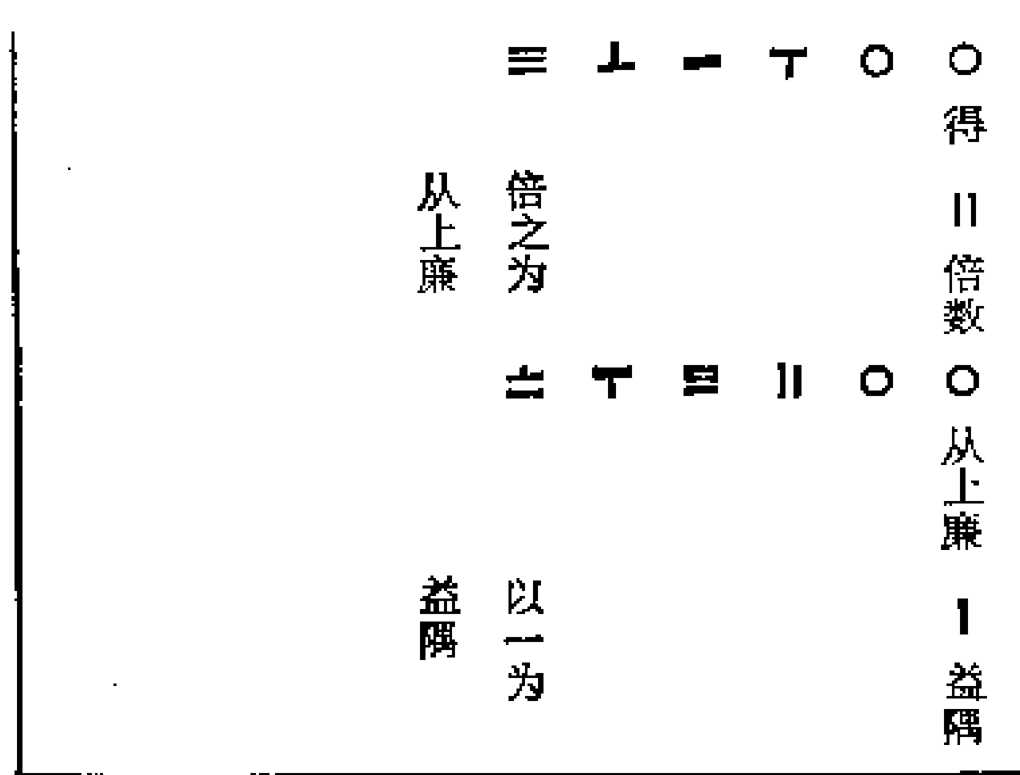
实

亿

大率

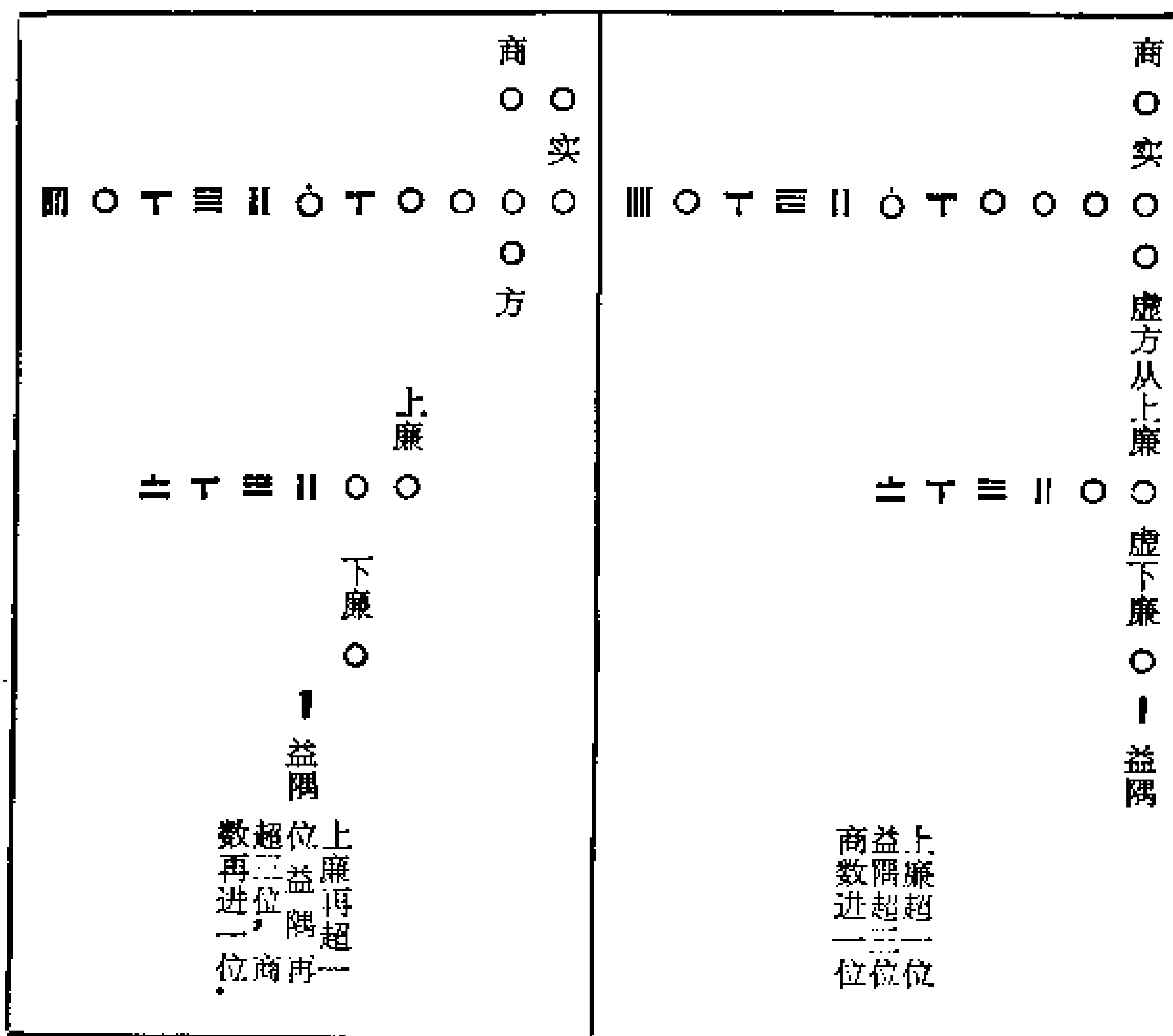
相并

小率



正负开三乘方图

术曰：商常为正，实常为负；从常为正，益常为负。



商
实
方
上廉
益下廉
益隅

以商生益下廉，得益上廉。

商
实
方
上廉
下廉
益隅

上商八百，为定商，以商生隅，入益下廉。

商
实
方
上廉
下廉
益隅

以商生上廉，入方。

商
实
方
从上廉
益上廉
下廉
益隅

上廉益从相消，得从上廉。



商	商
负实	实
正积	
方	方
上廉	上廉
下廉	下廉
益隅	益隅
以负实消正积，其积乃有余，为正实，谓之换骨	以商生方，乃得正积，与实相消

【注】 据正负开方术的规定："实常为负"，在运算过程中应用代数加法时，如果发生使"实"变为正数的话，秦氏把它叫作"换骨"。

商	商
实	正实
方	方
上廉	上廉

Ⅲ〇〇	一丅〇〇
下廉	下廉
丨	丨
益隅	益隅
以商生隅，入下廉，一变。	以商生下廉，入上廉内，相消。

商 Ⅲ〇〇	商 Ⅲ〇〇
实 Ⅲ〓Ⅱ〇Ⅲ〓Ⅲ〇〇〇〇 〓Ⅲ〇丅〇〇〇〇	实 Ⅲ〓Ⅱ〇Ⅲ〓Ⅲ〇〇〇〇 〓Ⅲ〇丅〇〇〇〇
方	方
一Ⅱ〓Ⅱ〇〇 正上廉	丨一Ⅲ丄Ⅲ〇〇
丨〓Ⅲ〇〇〇〇 负上廉	上廉
一丅〇〇	一丅〇〇
下廉	下廉
丨	丨
益隅	益隅
以正负上廉相消。	以商生上廉，入方内，相消。

商

实

正方

负方

上廉

下廉

益隅

以正负方相消

商

实

方

上廉

下廉

益隅

以商生隅，入下廉。二变。

商

实

方

上廉

下廉

益隅

以商生下廉，入上廉

商

实

方

上廉

下廉

益隅

以商生隅，入下廉。三变。

商

实

方

上廉

下廉

隅

方一退，上廉二退，下廉三退，隅四退，置四商，续变。

续商

实

方

上廉

下廉

隅

以方约实，续商置四十，生隅，入下廉内。

商

实

方

上廉

下廉

隅

以商生下廉，入上廉。

商

实

方

上廉

下廉

隅

以商生上廉，入方内○

左图	右图
商　840	商　840
00000000000　实空	38205440000　实
955136000　方	955136000　方
3206400　上廉	3206400　上廉
3240　下廉	3240　下廉
1　隅	1　隅
所得商数八百四十步为田积	以续商四十命方法除实适尽

已上系开三乘方翻法图，后篇效此。

【新释】　已知：$a=39$ 步，$b=25$ 步，$c=30$ 步，代入(α)式，得

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0.$$

解之，其草式如次：

−1	+ 0	+ 763200	+ 0	−40642560000	
	− 800	− 640000	+ 98560000	+78848000000	800
−1	− 800	+ 123200	+ 98560000	+38205440000	
	− 800	−1280000	−925440000		
−1	−1600	−1156800	−826880000		
	− 800	−1920000			
−1	−2400	−3076800			
	− 800				
−1	−3200	−3076800	−826880000	+38205440000	
	− 40	− 129600	−128256000	−38205440000	40
−1	−3240	−3206400	−955136000	+ 0	

因得:　　　　　　$x=840$ 步.

【注】 上式另有一个正根系增根:

$$x=240\text{ 步.}$$

20. 三斜求积

问沙田一段,有三斜,其小斜一十三里,中斜一十四里,大斜一十五里. 里法三百步,欲知为田几何?

答曰: 田积三百一十五顷.

术曰: 以少广求之. 以小斜幂,并大斜幂,减中斜幂,余半之,自乘于上. 以小斜幂乘大斜幂,减上,余四约之,为实. 一为从隅,开平方,得积.

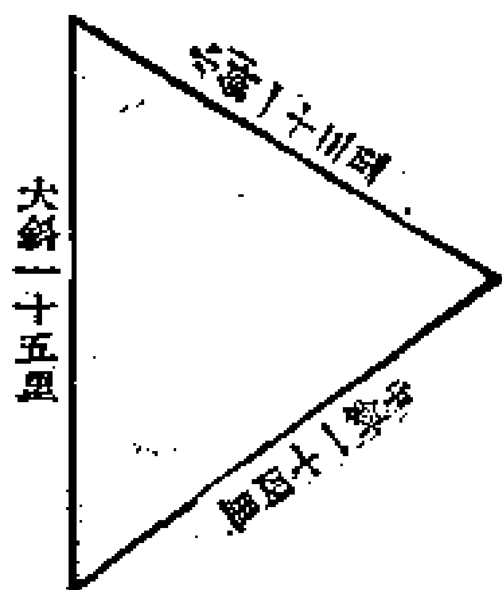


图 9

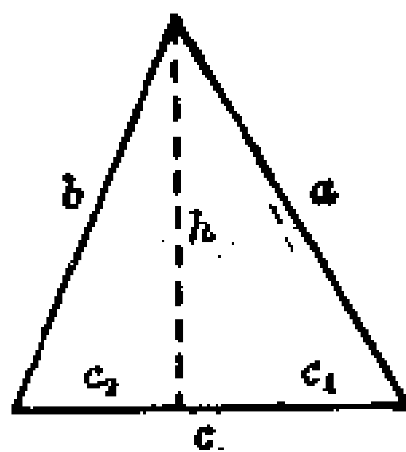


图 10

【新释】 如图 10,设大斜为 a,中斜为 b,小斜为 c,所求的面积为 A,则有

$$A=\frac{c}{2}\cdot h \qquad (\alpha)$$

又

$$c_2^2=a^2-h^2 \qquad (\beta)$$

$$c_1^2=(c-c_1)^2=b^2-h^2 \qquad (\gamma)$$

(γ)式减(β)式,得

$$c^2-2c_1c=b^2-{}^2a,$$

$$\therefore \quad c_1=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c} \qquad (\delta)$$

又

$$h^2=a^2-c_1^2=\frac{a^2c^2-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}{c^2} \qquad (\varepsilon)$$

平方(α)式，得

$$A^2=\frac{c^2}{4}h^2 \qquad (\zeta)$$

把(ε)式代入(ζ)式，得

$$A^2-\frac{a^2c^2-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}{4}=0 \qquad (\eta)$$

【原草】 草曰：以小斜 13 里自乘，得 169 里，为小斜幂．以大斜 15 里自乘，得 225 里，为大斜幂．并小斜幂，得 394 里于上．以中斜 14 里自乘，得 196 里，为中斜幂．减上，余 198 里，以半之，得 99 里，自乘，得 9801 里于上．以小斜幂 169，乘大斜幂 225，得 38025，减上，余 28224，以 4 约之，得 7056 里，为实．以 1 为隅，开平方，以隅超步，为 100，乃于实上商置 80，以商生隅，得 800，为从方．乃命上商，除实，余 656，又以商生隅，入方，得数，退一位，为 160，隅退二位，为 1．乃于实上续商 4 里，生隅，入从方内，得 164，乃命续商，除实适尽．所得 84 里，为田积．其形长 84 里，广 1 里，以里法 300 步自乘，得 9 万步，乘 84 里，得 756 万步．从亩法 240 除之，得 31500 亩．又以顷法 100 亩约之，得 315 顷．

【新释】 已知：$a=15$ 里，$b=14$ 里，$c=13$ 里，代入(η)式，得

$$A^2-\frac{15^2\times13^7-\left(\dfrac{15^2+13^2-14^2}{2}\right)^2}{4}=0$$

化简，得 $$A^2-7056=0.$$

1	+0	−7056	
	80	+6400	80
1	+80	−656	
	80		
1	+160	−656	
	4	+656	4
1	+164	+0	

因得：　$A=84$ 方里 $=84\times300^2$ 步 $=7560000$ 步

$=31500$ 亩 $=315$ 顷.

21. 斜 荡 求 积

问有荡一所，正北阔一十七里，自南尖穿径中长二十四里，东南斜二十里，东北斜一十五里，西斜二十六里．欲知亩积为何？

答曰：荡积一千九百一十一顷六十亩．

术曰：以少广求之．置中长，乘北阔，半之，为寄．以中长幂减西斜幂，余为实．以一为隅，开平方，得数，减北阔，余自乘，并中长幂，共为内率．以小斜幂，并率，减中斜幂，余半之，自乘于上．以小斜幂乘率，减上，余四约之，求实．以一为隅，开平方，得数，加寄，共为荡积．

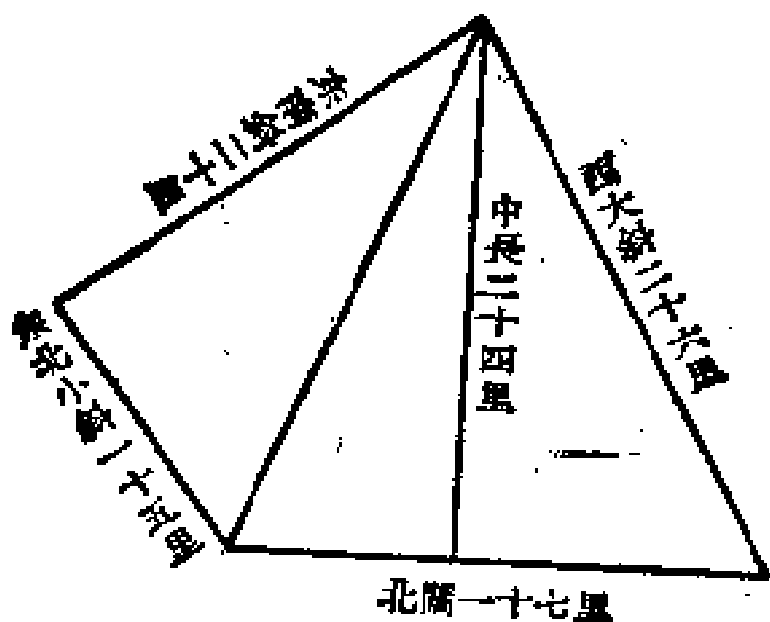


图 11　斜荡图

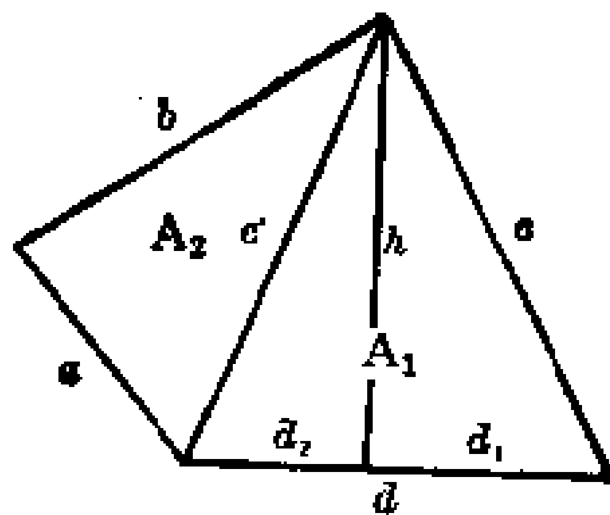


图　12

【新释】 如右图，设西大斜为 c，东南中斜为 b，东北小斜为 a，北阔为 d，中长为 h，荡中内斜为 c'，则有

荡积：

$$A = A_1 + A_2 \qquad (\alpha)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} dh \qquad (\beta)$$

又

$$d_1 = \sqrt{c^2 - h^2}$$

$$d_2 = d - d_1 = d - \sqrt{c^2 - h^2},$$

$$c'^2 = d_2^2 + h^2 = (d - \sqrt{c^2 - h^2})^2 + h^2,$$

$$\therefore \quad A_2^2 = \frac{1}{4}\left\{[(d - \sqrt{c^2 - h^2})^2 + h^2]a^2 - \left[\frac{(d - \sqrt{c^2 - h^2})^2 + h^2 + a^2 - b^2}{2}\right]^2\right\} \qquad (\gamma)$$

【原草】 草曰：以中长24里，乘北阔17里，得408，乃半之，得204里，为寄．以中长自乘，得576，为长幂．以西斜26里自乘，得676，为大幂．以减长幂，余100里，为实．开平方，得10里，以减北阔数17里，余7里，自乘，得49，并长幂576，得625，为内率．次置东北(原脱"北"字)小斜15里自乘，得225，为小斜幂．又置东南中斜20里自乘，得400，为中幂．欲以小斜幂并率，得850，以减中幂400，余450，乃半之，得225，自乘，得50625里于上．又以小斜幂225，乘率625，得140625，减上，余9万里，以4约，得22500，为实．开平方，得150，并寄204里，得354里，为泛．以里法360自乘，得129600步，乘泛，得45878400步，以亩法240步约之，得1911顷60亩，为荡积．

【新释】 已知：$d=17$ 里，$h=24$ 里，代入(β)式，得

$$A_1 = \frac{1}{2} \times 17 \times 24 = 204 \text{ 方里}.$$

又知：$a=15$ 里，$b=20$ 里，$c=26$ 里，

$$\therefore \quad d_1 = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{676 - 576} = 10 \text{ 里},$$

$$d_2=d-d_1=17-10=7\text{ 里},$$

$$c'^2=7^2+24^2=625,$$

$$\therefore\quad A_2^2=\frac{625\times15-\left(\dfrac{625+15-20^2}{2}\right)^2}{4}$$

$$=\frac{140625-50625}{4}=22500,$$

因得： $A_2=\sqrt{22500}=150$ 方里.

由(α)式，得

$$A=A_1+A_2=204+150=354\text{ 方里}$$

$$=354\times360^2\text{ 步}=45878400\text{ 步}$$

$$=\frac{45878400}{240}\text{ 亩}=191160\text{ 亩}=1911\text{ 顷 }60\text{ 亩}.$$

22. 计地容民

问沙洲一段，形如棹刀．广一千九百二十步，纵三千六百步，大斜二千五百步，小斜一千八百二十步，以安集流民，每户给一十五亩．欲知地积容民几何？

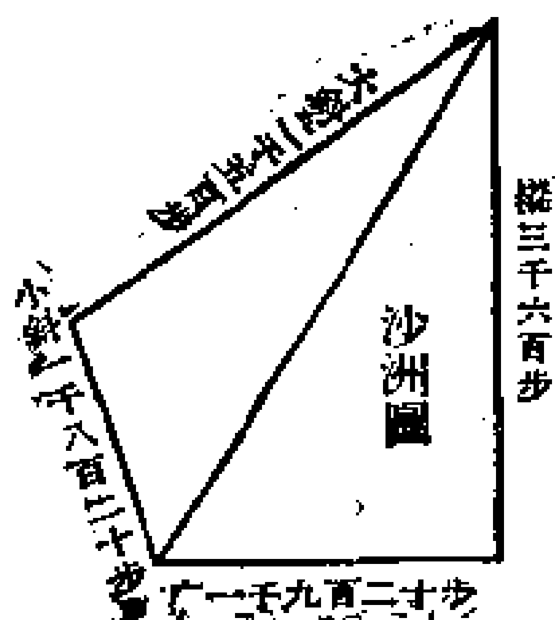


图 13

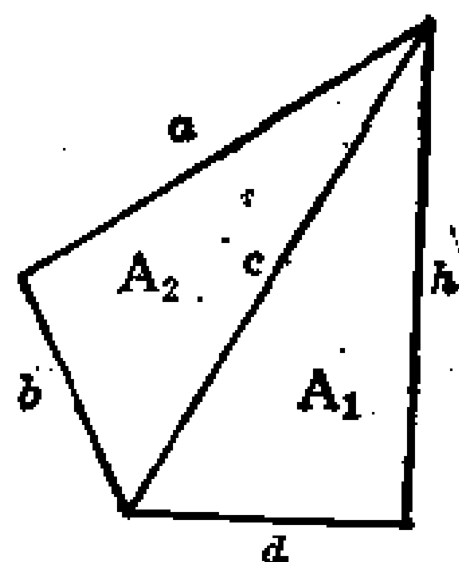


图 14

答曰：地积二百三顷五十亩(原答：一百四十九顷九十五亩.)，容民一千三百五十六户(原答：九百九十九户.)，余地一十亩.

术曰：以少广求之．置广乘长，半之为寄．以广幂并纵幂，为中幂．以小斜幂并中幂，减大斜幂，余半之，自乘于上．以小斜幂乘中幂，减上，余以四约之，为实．以一为隅，开平方，得数，加寄，共为积．以每户给数，除积，得容民户数．

【新释】 如图 14，设大斜为 a，小斜为 b，洲广为 d，洲纵为 h，中斜为 c，则

$$沙洲地积：A=A_1+A_2 \tag{α}$$

又

$$A_1=\frac{1}{2}dh \tag{β}$$

$$c^2=d^2+h^2,$$

$$\therefore\quad A_2^2=\frac{b^2c^2-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)^2}{4}$$

$$=\frac{b^2(d^2+h^2)-\left(\dfrac{b^2+d^2+h^2-a^2}{2}\right)^2}{4} \tag{γ}$$

设每户给数为 n，则

$$户数=\frac{A}{n} \tag{δ}$$

【原草】 草曰：置广 1920 步，乘纵 3600 步，得 6912000 步，乃半之，得 3456000 步，为寄．以广自乘，得 3686400 步，为广幂．又以纵自乘，得 1296 万步，为纵幂．并广幂，得 16646400 步，为中幂．次以小斜 1820 步自乘，得 3312400 步，为小斜幂．又以大斜

2500 步自乘，得 625 万步，为大斜幂．欲以小斜幂并中幂，得 19958800 步，以大斜幂减之，余 13708800 步，乃半之，得 6854400 步，自乘，得 4698279936 万步于上．次以小斜幂乘中幂，得 5513953536 万步，减上，余 815673600 万，以 4 约之，得 203918400 万，为实．以 1 为隅，开平方，得 1428000 步(原为“142800 步”)，并寄 3456000 步，共得 4884000 步(原为“3598800 步”)．以亩法 240 步除之，得 20350 亩(原为“14995 亩”)．次以顷法 100 亩约之，为 203 顷 50 亩(原为“149 顷 95 亩”)，为地积，又为实．以每户所给 15 亩为法，除实，得 1356 户(原为“999 户”)．不尽 10 亩，不及一户所给数，以为余地 10 亩．

【注】 沈氏钦裴曰：地积容民答数误，系草中开方得数误退一位所致．

【新释】 已知：$d=1920$ 步，$h=3600$ 步，代入(β)式，得

$$A_1=\frac{1}{2}\times 1920\times 3600=3456000\text{ 步}.$$

又中幂：

$$c^2=d^2+h^2=1920^2+3600^2$$

$$=3686400+12960000=16646400\text{ 步}.$$

复知：$a=2500$ 步，$b=1820$ 步，由(γ)式，得

$$A_2^2=\frac{1820^2\times 16646400-\left(\dfrac{1820^2+16646400-2500^2}{2}\right)^2}{4}$$

$$=\frac{55139535360000-46982799360000}{4}$$

$$=\frac{8156736000000}{4}=2039184000000.$$

解之，其草式如次：

1	+ 0	−2039184000000	
	1000000	+1000000000000	1000000
1	+1000000	−1039184000000	
	1000000		
1	+2000000	−1039184000000	
	400000	+ 960000000000	400000
1	+2400000	− 79184000000	
	400000		
1	+2800000	− 79184000000	
	20000	+ 56400000000	20000
1	+2840000	− 22784000000	
	20000		
1	+2840000	− 22784000000	
	8000	+ 22784000000	8000
1	+2848000	+ 0	

因得：
$$A_2=1428000\text{ 步}.$$
由(α)式，得
$$A=3456000+1428000=4884000\text{ 步}$$
$$=20350\text{ 亩}=203\text{ 顷 }50\text{ 亩}.$$
由(δ)式，得
$$\text{户数}=\frac{20350}{15}=1356\text{ 户}.$$
余地 10 亩。

23. 蕉 田 求 积

问蕉叶田一段，中长五百七十六步，中广三十四步，不知其周。求积亩合几何？

答曰：田积四十五亩一角一十一步，一十二万六千一百四十分步之五千二百一十三（原答：四十五亩一角十一步，六万三千七十

分步之五千二百一十三)。

术曰：以长并广，再自乘，又十乘之，为实．半广半长各自乘，所得相减，余为从方，一为从隅，开平方，半之，得积．

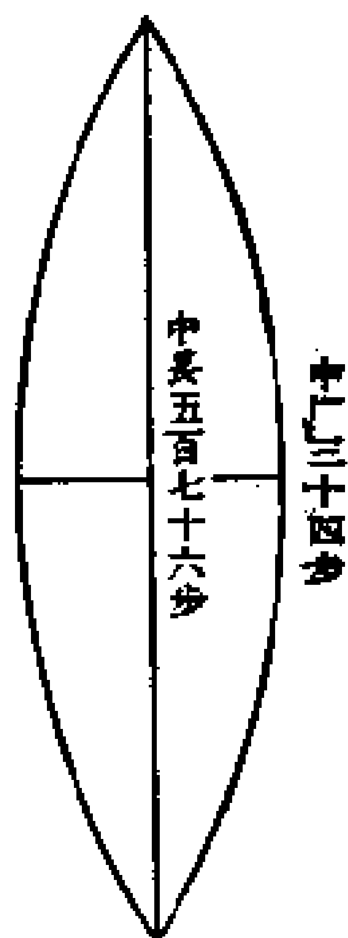


图 15

【新释】 设中长为 a，中广为 b，秦氏创立的近似值公式为：

$$x^2-\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]x-10(a+b)^3=0 \qquad (\alpha)$$

式中 x 是所求面积 A 的二倍。

【注】(α)式的来源，虽不知其所本，若仅就其结果来说，则较之《九章算术》卷一所载弓形面积公式"以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一．"即

$$A=\frac{1}{2}(ab+b\ ) \qquad (\beta)$$

稍为精密．原较之近代方法——如苏联吉西辽夫原著高中《平面几何学》第五章末所附：已知底 a 和高 b 的弓形面积近似值公式第一式：

$$A=\frac{2}{3}ab \qquad (\gamma)$$

仍嫌粗略．《数书九章札记》对(α)式责之过甚："….其术之不合显然矣．……宜其不可用也．"然而秦氏之所以创立(α)式，主要的是发现了古法太疏，并欲另立一个弓形面积的近似公式．因此，(α)式虽较(γ)式仍嫌过疏，但较(β)式，已是前进一步矣．

【原草】草曰：以长 576 步，并广 34 步，得 610，以两度自乘，得 226981000 步，进一位，即是以 10 乘之，得 226981 万步，定得此数以为实．置长 576，以半之，得 288，自乘，得 82944 于上．又置广 34 步，以半之，得 17，自乘，得 289，减上，余 82655，为从方．以 1 为从隅，开平方，得 21742 步．不尽 10426 步，以商生隅，入方，又

并隅算，共得 126140，为母． 与不尽及开方田积数，皆半之，田积定得 10871 步 126140 分步（原为“63070 分步”）之 5213． 以亩法 240 约之，得 45 亩 1 角 11 步 126140（原为“63070”）分步之 5213．

【新释】 已知：$a=576$ 步，$b=34$ 步，代入（α）式，得

$$x^2+82655x-2269810000=0.$$

解之：

1	+82655	−2269810000	
	20000	+2053100000	20000
1	+102655	−21671 0000	
	20000		
1	+122655	−216710000	
	1000	+123655000	1000
1	+123655	−930550000	
	1000		
1	+124655	−93055000	
	700	+87748500	700
1	+125355	−5306500	
	700		
1	+126055	−5306500	
	40	+5043800	40
1	+126095	−262700	
	40		
1	+126135	−262700	
	2	+252274	2
1	+126137	· 10426	
	2		
1	+126139	−10426	

因得： $x=21742\dfrac{10426}{1+126139}=21742\dfrac{5213}{63070}$ 步．

$$\therefore \quad A=\frac{x}{2}=10871\frac{5213}{126140}\text{步}$$

$$=45\text{亩}1\text{角}11\frac{5213}{126140}\text{步}.$$

【注】 按(β)式，求得

$$A=2\times\frac{1}{2}\times(576\times17+17^2)=10081\text{步}$$

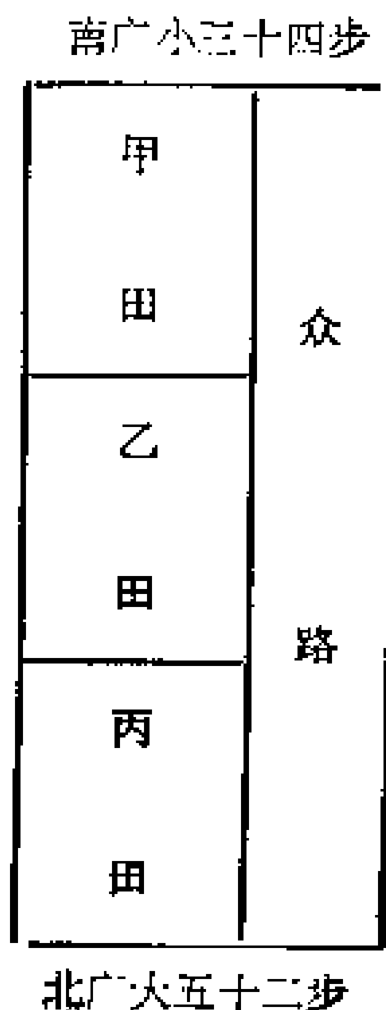
$$=42\text{亩}1\text{步}.$$

按(γ)式，求得

$$A=\frac{2}{3}\times576\times34=13056\text{步}=54\text{亩}96\text{步}.$$

24. 均分梯田

问户业田一段，若梯之状．南广小三十四步，北广大五十二步，正长一百五十步，合系兄弟三人，均分其田，边道各欲出入，其地难分．经官乞分定南甲乙，北丙，欲知其田共积，各人合得田数，及各段正长大小广几何？



答曰：田共积二十六亩二百一十步。

甲得八亩三角五十步。

小广三十四步。系元南广。

大广四十步。五万八千七百九分步之五万二千二百八十四。大约百分步之八十九分。

正长五十七步。二千四十五分步之八百五十三，大约一百分步之四十一分。

乙得八亩三角五十步。

小广。同甲大广。

大广四十六步。七万九千一百七十一亿七千七百一十二万六千二百五十七分步之六万一千四百八十二亿九千一百三十三万六千六十八(原为"八万四千八百二十六亿八千九百五十七万二千六百五十一分步之六万五千八百七十四亿五千四百八十二万五千二百八十三。")，并大率约百分步之七十七分半强。

正长四十九步。四亿一千二百四十万六千三百一十(原无"一十"二字)九分步之二千二十七万六千三百一十九，大约百分步之四分九厘。

丙得八亩三角五十步。

小广。同乙大广。

大广五十二步。系元北广。

正长四十三步。八千四百三十三亿七千九十二万二千三百五十五分步之四千五百一亿二千三百二十五万九千八百九十三(原为"八千四百三十三亿七千九十万一千九百五分步之四千四百八十八亿八千六百二万九千四十六"。)，大约百分步之五十三分强。

术曰：以少广及从法求之。并两广，乘长，得数，以分田人数约之，为通率。半之，为各积。以长乘各积，为共实。以长乘南广，为甲从方，二广差，半之，为共隅。开连枝平方，得甲截长。以甲长除通率，得数，减小广，余为甲广，即为乙小广。以元长乘乙小广，为乙从方，置共隅共实，开连枝平方，得乙截长。从乙长除通率，得数，减乙小广，余为乙大广，即为丙小广。并甲乙长，减元长，余为丙

长. 以元大广为丙大广. 各有分者通之.

【新释】 设田共积为 S, 分田人数为 n, 每人分田(即各积)为 A, 小广为 b, 大广为 a, 正长为 h, 则得

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h \qquad (\alpha)$$

$$A=\frac{S}{n}=\frac{(a+b)h}{2n} \qquad (\beta)$$

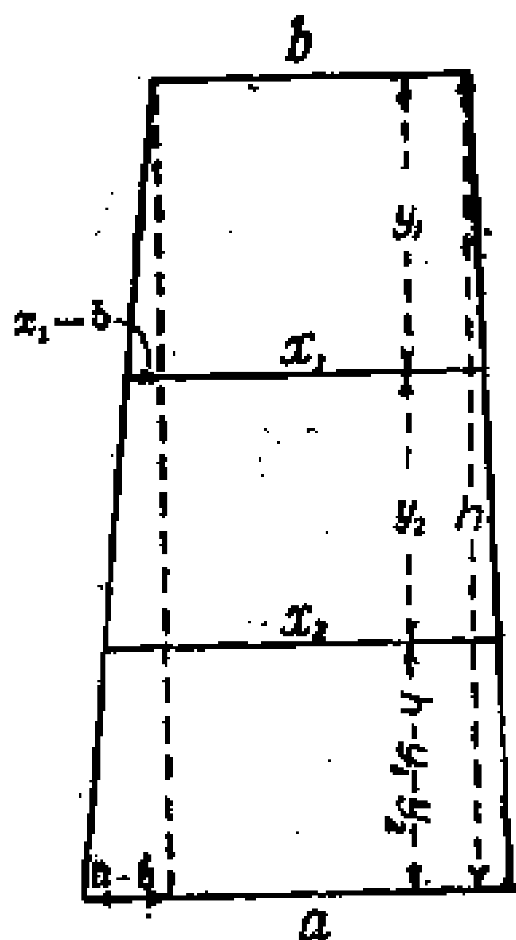


图 16

次设甲得田正长为 y_1, 大广(即乙小广)为 x_1, 依题意可得

$$\frac{b+x_1}{2}y_1=A \qquad (\gamma)$$

$$\frac{a+x_1}{2}(h-y_1)=\frac{a+b}{2}h-A \qquad (\delta)$$

联立解(γ), (δ)二式, 则有

$$x_1=\frac{2A}{y_1}-b=\frac{(a+b)h}{ny_1}-b \qquad (\varepsilon)$$

将(ε)式代入(δ)式, 得

$$\frac{a+\dfrac{2A}{y_1}-b}{2}(h-y_1)=\frac{(a+b)h}{2}-A,$$

化简, 得

$$\frac{a-b}{2}y_1^2+bhy_1-hA=0 \qquad (\zeta)$$

又设乙得田正长为 y_2, 大广(即丙小广)为 x_2, 则

$$\frac{x_1+x_2}{2}y_2=A \qquad (\eta)$$

$$\frac{b+x_2}{2}(y_1+y_2)=2A \qquad (\theta)$$

联立解(γ), (η), (θ)三式, 可得

$$(x_1^2-b^2)y_2^2+4Ax_1y_2-4A^2=0 \qquad (\varsigma)$$

复因

$$\frac{x_1-b}{a-b}=\frac{y_1}{h} \tag{κ}$$

联立解(γ),(ς),(κ)三式,得

$$\frac{a-b}{2}\cdot y_2^2+x_1hy_2-hA=0 \tag{λ}$$

由(η)式,得

$$x_2=\frac{2A}{y_2}-x_1=\frac{(a+b)h}{ny_2}-x_1 \tag{μ}$$

又

$$丙正长=h-(y_1+y_2) \tag{ν}$$

$$丙大广=元北广=a \tag{ξ}$$

【原草】 草曰:置小广34,并大广52,得86,乘长150,得12900,为实.以兄弟3人约之,得4300,为通率.半之,得2150,为各积.以亩法240步约之,得8亩.不尽230步,以角法60步约之,得3角50步.是三人各得8亩3角50步.以元长150步,乘各积2150,得322500,为共实.以长150,乘小广34,得5100,为甲从方.以小广减大广,余18,乃半之,得9,为共隅.开连枝平方,开方草,更不繁具.得57步.不尽3,约为2045分步之853,为甲截长.乃以分母2045通全步,内子,共得117418,为法.又以分母乘通率4300,得8793500,为实.以法除之,得74步.不尽104568,与法求等,得2,俱约之,为58709分步之52284.乃以小广34步,于所得全步74步内减之,余40步58709分步之52284,为甲大广,即为乙小广.今次求乙长,乃以分母58709,通乙小广40步,得2348360,内子52284,得2400644,又元长150步乘之,得360096600,为乙从方.又以分母58709,通共实322500,得18933652500,为乙实.又以分母通共隅9,得528381,为乙从隅.开连枝平方,更不立草.得49步,不尽20276319,隅并方,得共412406319(原为"412406309"),为母、与不尽求等,单一不可约,乃定为49步412406319(原为"412406309")分步之20276319,为乙截

长. 以乙长母通全步, 内子, 得20228185950(原为“20228185460”), 为法. 以乙长步下母412406319(原为“412406309”), 乘通率4300, 得1773347171700(原为“1773347128700”), 为实. 以法除之, 得87步. 不尽13494994050(原为“13494993680”), 与法求等, 得150(原为“140”), 俱约之, 为87步134854573分步之89966627(原为“87步144487039分步之96392812”), 为得数. 乃以乙小广母58709, 乘得数子89966627(原为“96392812”), 得5281850704543(原为“5659125599708”), 为泛. 欲以得数母134854573(原为“144487039”)分, 乘乙小广子52284, 得7050736494732(原为“7554360347076”), 以为寄数于上. 乃以小广母58709, 乘得数母134854573(原为“144487039”), 得7917177126257(原为“8482689572651”), 以寄减泛, 今不及减, 乃破全步1为分, 并泛, 得86步13199027830800(原为“86步14141815172359”), 减去小广40步及分, 余46步7917177126257分步之6148291336068(原为“46步8482689572651分步之6587454825283”), 为乙大广, 亦丙小广. 求丙长, 置甲长57步2045分步之853(原误为“856”), 乙长49步412406319(原为“412406309”)分步之20276319, 以甲乙分母互乘子, 甲乙分母相乘, 得甲正长57步843370922355分步之351782590107(原为“57步843370901905分步之353019800504”), 乙正长49步843370922355分步之41465072355(原为“49步843370901905分步之41465072355”), 并甲乙长及分, 共长106步393247662462分(原为“106步394484872859分”), 用减元长150步, 先破1步, 通分母, 作843370922355(原为“843370901905”), 减去甲乙共长, 余43步843370922355分步之450123259893(原为“43步843370901905分步之448886029046”), 为丙正长.

【注】 沈钦裴氏校正结果与此相同.

【新释】 已知: $a=52$ 步, $b=34$ 步, $h=150$ 步, $n=3$, 代入(α), (β)二式, 得

$$S=\frac{1}{2}(52+34)\times 150=6450\text{ 步}$$
$$=26\text{ 亩 }210\text{ 步},$$
$$A=\frac{S}{n}=\frac{6450}{3}=2150\text{ 步 }=8\text{ 亩 }3\text{ 角 }50\text{ 步}.$$

由(ζ)式，得

$$\frac{52-34}{2}y_1^2+34\times 150y_1-150\times 2150=0,$$

化简，得 $$9y_1^2+5100y_1-322500=0.$$

9	+5100	−322500	
	450	+277500	50
9	+5550	− 45000	
	450		
9	+6000	− 45000	
	63	+ 42441	7
9	+6063	− 2559	
	63		
9	+6126	− 2559	

因得：

$$y_1=57\frac{2559}{6126+9}=57\frac{2559}{6135}=57\frac{853}{2045}\text{ 步}$$
$$\doteq 57\frac{41}{100}\text{ 步}.$$

将 y_1 的值代入(ε)式，得甲大广(即乙小广)：

$$x_1=\frac{2A}{y_1}-b=\frac{4300}{57\frac{853}{2045}}-34=\frac{2045\times 4300}{57\times 2045+853}-34$$
$$=74\frac{52284}{58709}-34=40\frac{52284}{58709}\text{ 步}\doteq 40\frac{89}{100}\text{ 步}.$$

把乙小广 x_1 的值代入(λ)式，得

$$9y_2^2+150\times\left(40\,\frac{52284}{58709}\right)y_2-322500=0,$$

化简，得

$$528381y_2^2+360096600y_2-18933652500=0.$$

528381	+360096600	−18933652500	
	21135240	+15249273600	40
528381	+381231840	− 3684378900	
	21135240		
528381	+402367080	− 3684378900	
	4755429	+ 3664102581	9
528381	+407122509	− 20276319	
	4755429		
528381	+411877938	− 20276319	

因得：

$$y_2=49\,\frac{20276319}{528381+411877938}=49\,\frac{20276319}{412406319}\text{ 步}$$

$$\doteq 49\,\frac{4.9}{100}\text{ 步}.$$

将 y_2 的值代入(μ)式，得

$$x_2=\frac{2A}{y_2}-x_1=\frac{4300}{49\,\dfrac{20276319}{412406319}}-40\,\frac{52284}{58709}$$

$$=\frac{4300\times412406319}{49\times412406319+20276319}-40\,\frac{52284}{58709}$$

$$=\frac{1773347171700}{20228185950}-40\,\frac{52284}{58709}$$

$$=87\,\frac{13494994050}{20228185950}-40\,\frac{52284}{58709}$$

$$=87\,\frac{89966627}{134854573}-40\,\frac{52284}{58709}$$

$$=46+\frac{(134854573+89966627)\times58709-134854573\times52284}{134854573\times58709}$$

$$=46+\frac{13199027830800-7050736494732}{7917177126257}$$

$$=46\frac{6148291336068}{7917177126257}\text{步}\doteq46\frac{77.5}{100}\text{步}.$$

由(ν)式，得

$$\text{丙正长}=h-(y_1+y_2)$$

$$=150-\left(57\frac{853}{2045}+49\frac{20276319}{412406319}\right)$$

$$=150-\left(57\frac{853\times412406319}{2045\times412406319}+49\frac{20276319\times2045}{2045\times412406319}\right)$$

$$=150-\left(57\frac{351782590107}{843370922355}+49\frac{41465072355}{843370922355}\right)$$

$$=150-106\frac{393247662462}{843370922355}$$

$$=43\frac{450123259893}{843370922355}\text{步}\doteq43\frac{53}{100}\text{步}.$$

由(ξ)式，知

$$\text{丙大广}=\text{元北广}=a=52\text{ 步}.$$

第六卷 凡 三 问

25. 漂 田 推 积

问三斜田，被水冲去一隅，而成四不等直田之状．元中斜一十六步，如多长．水直五步，如少阔．残小斜一十三步，如弦．残大斜二十步，如元中斜之弦．横量径一十二步，如残田之广．又如元中斜之句，亦是水直之股．欲求元积、残积、水积、元大斜元小(原

书“小”误为“中”)斜、二水斜各几何?

答曰:元积一百三十九步. 一十一分步之七.(原答:一百三十八步.一十一分步之八.).

水积,一十三步. 一十一分步之七.(原答:一十二步.一十一分步之八.).

残积,一百二十六步.

元大斜,二十九步. 一十一分步之一.

元小斜,一十八步. 一十一分步之一十.

水大斜,九步. 一十一分步之一.

水小斜,五步. 一十一分步之一十.(原脱“十”字).

术曰:以少广求之,连枝入之,又句股入之. 置水直减中斜,余为法. 以中斜乘大残,为大斜实. 以法除实,得元大斜. 以残大斜减之,余为水大斜. 以法乘径,又自之,为小斜隅. 以水直幂并径幂,为弦幂,又乘径幂,又乘中斜幂,为小斜实. 与隅可约,约之. 开连枝平方,得元小斜.以残小斜减之,余为水小斜.以水直幂,并水大斜幂,减水小斜幂,余半之,自乘于上.以水直幂乘水大斜幂,内减上,余四约之,通分内子,为实.以母为从隅.开连枝平方,得水积(原无“以水直幂,并水大斜幂,…. 得水积”诸语、原为“以水直乘之,为水实. 倍水小母为法,除之,得水积.”). 以水直并中斜,乘径,为实. 以二为法,除之,得残积,以残积并水积,共为元积. 有分者通之,重有者重通之.

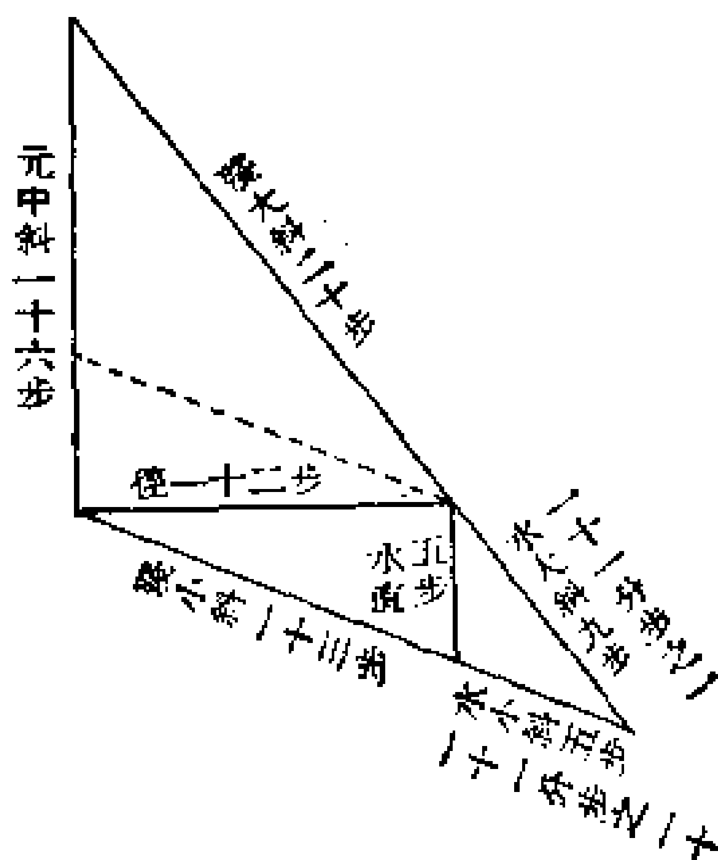


图 17

【新释】 设元中斜为 a_1, 水直为 a_2, 残小斜为 a_3, 残大斜为

a_4, 横量径为 a_5. 又设元大斜为 x_1, 元小斜为 x_2, 水大斜为 x_3, 水小斜为 x_4, 如图 18 所示, 则有

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{a_4}{a_1-a_2}$$

或

$$x_1=\frac{a_1a_4}{a_1-a_2} \qquad (\alpha)$$

$$x_3=x_1-a_4 \qquad (\beta)$$

图 18

又因

$$\frac{x_2^2}{a_2^2+a_5^2}=\frac{a_1^2}{(a_1-a_2)^2},$$

$$\therefore \quad (a_1-a_2)^2x_2^2=a_1^2(a_2^2+a_5^2) \qquad (\gamma)$$

或

$$a_5^2(a_1-a_2)^2x_2^2=a_1^2a_5^2(a_2^2+a_5^2) \qquad (\gamma')$$

(γ') 式便是秦氏所用的公式.

$$x_4=x_2-a_3 \qquad (\delta)$$

又设元积为 A, 残积为 A_1, 水积为 A_2, 则得

$$A_2=\sqrt{\frac{x_3^2a_2^2-\left(\frac{x_3^2+a_2^2-x_4^2}{2}\right)^2}{4}} \qquad (\varepsilon)$$

$$A_1=\frac{(a_1+a_2)a_5}{2} \qquad (\zeta)$$

而

$$A=A_1+A_2 \qquad (\eta)$$

【注】 秦氏求水积时, 是以

$$A_2=\frac{1}{2}a_2x_4 \qquad (6')$$

得出的．因之水积是略值．

【原草】 草曰：以水直5减中斜16，余11，为法．以中斜16乘大残20，得320，为大斜实．以法除之，得29步11分步之1，为元大斜．内减残大斜20步，余9步11分步之1，为水大斜．以法11乘径12，得132，自之，得17424，为小斜隅．以水直5自乘，得25，为水直幂．以径12自之，得144，为径幂．并水直幂，得169，为弦幂．以乘径幂144，得24336于上．又以中斜16自乘，得256，为中斜幂．以乘上，得6230016，为小斜实．开平方，与隅求等，得144，俱约之，实得43264，隅得121，开方，不尽、以连枝术入之，用隅121乘实43264，得5234944，为定实．以1为定隅，开平方，得2288，为实．以约隅121除之，得18步，不尽110，与法121，俱以11约之，得11分步之10，为元小斜．减残小斜13步，余5步11分步之10，为水小斜．置水直幂25步，并水大斜幂82步121分步之78，得107步121分步之78，内减水小斜幂34步121分步之111，余72步11分步之8，半之，得36步11分步之4，自乘，得1322步121分步之38于上．次以水直幂25步，乘水大斜幂82步121分步之78，得2066步121分步之14，内减上，余743步121分步之97，以4约之，得185步121分步之115，通分内子，得22500步，为实．以母121，为隅．开连枝平方，得13步11分步之7，为水积(原无"置水直幂25步，并水大斜幂82步121分步之78，…．得13步11分步之7，为水积．"原为"置水小斜通步内子，得65，以水直5步乘之，得325，为水实．倍水小母11，得22，为法．除之，得14步．不尽17，以法命之，得14步22分步之17，为水积．")．置中斜16，并水直5，得21，乘径12，得252，以半之，得126，为残积．以并水积．共得139步11分步之7(原为"140步22分步之17．")，为元积．

【注】　沈钦裴氏改正结果与此相同，而用术则稍异．

【新释】　已知：$a_1=16$ 步，$a_2=5$ 步，$a_4=20$ 步．代入(α)，(β)二式，得

$$x_1=\frac{16\times20}{16-5}=\frac{320}{11}=29\frac{1}{11}\text{ 步},$$

$$x_3=29\frac{1}{11}-20=9\frac{1}{11}\text{ 步}.$$

又知：$a_3=13$ 步，$a_5=12$ 步，代入(γ)，(δ)二式，得

$$(16-5)^2x_2^2=16^2(5^2+12^2)$$

即
$$121x_2^2=43264.$$

以 $y=121x_2$ 代入上式，得

$$y=5234944.$$

解之，其草式如次：

1	+0	−5234944	
	2000	+4000000	2000
1	+2000	−1234944	
	2000		
1	+4000	−1234944	
	200	+840000	200
1	+4200	−394944	
	200		
1	+4400	−394944	
	80	+358400	80
1	+4480	−36544	
	80		
1	+4560	−36544	
	8	+36544	8
1	+4568	+0	

因得：
$$y=2288.$$

而
$$x_2=\frac{y}{121}=\frac{2288}{121}=18\frac{10}{11}\text{ 步},$$

$$x_4=18\frac{10}{11}-13=5\frac{10}{11}\text{ 步}.$$

由(ε)式，得水积：

$$A_2=\sqrt{\frac{\left(\frac{100}{11}\right)^2\times 5^2-\left[\frac{\left(\frac{100}{11}\right)+5-\left(\frac{65}{11}\right)}{2}\right]^2}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{250000-160000}{4\times 121}}=\sqrt{\frac{22500}{121}}$$

$$=\frac{150}{11}=13\frac{7}{11}\text{ 步}.$$

由(ζ)式，得残积：

$$A_1=\frac{(16+5)\times 12}{2}=126\text{ 步}.$$

由(η)式，得元积：

$$A=126+13\frac{7}{11}=139\frac{7}{11}\text{ 步}.$$

26．环 田 三 积

问环田大小圆田共三段，环田外周三十步，虚径八步，大圆田径一十步，小圆田周三十步．欲知三田积及环内周通实径大圆周小圆径各几何？

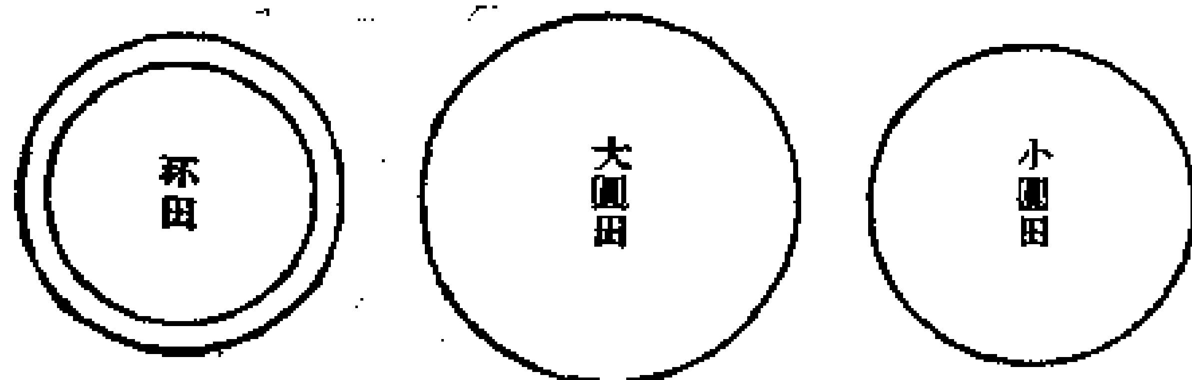


图 19

答曰：环田积二十步．二百三十六万二千二百五十六分步之一百二十九万八千二十五

通径九步．一十九分步之九．

实径一步．一十九分步之九．

内周二十五步．一十七分步之五．

大圆田积七十九步．五十三分步之三．

周三十一步．二十一分步之十三．

小圆田积七十一步．二百八十六分步之四十三．

径九步．一十九分步之九．

术曰：以方田及少广率变求之．各置环圆径自乘，为幂，进位为实．以一为隅，开平方，得周．各置圆环周自乘，为幂，退位为实．以一为隅，开平方，得径，以周幂或径幂乘各实，以一十六约之，为实．以一为隅，开平方，得圆积．置环周幂，乘径实，十六约之，为大率．置虚径幂，乘内周实，十六约之，为小率．以二率相减之，余以自乘，为实．并二率，倍之，为从上廉，一为益隅，开三乘方，得环积．置环周自乘，退位为实，一为隅，开平方，得通径．以虚径减通径，余为实径．其有开不尽者，约而命之．

【新释】 设直径为 d，圆周为 c，$\pi=\sqrt{10}$，则有

$$c^2=10d^2 \qquad (\alpha)$$

$$d^2=\frac{c^2}{10} \qquad (\beta)$$

又设圆积为 A，则

$$A^2=\frac{d^2c^2}{16}=\frac{10d^4}{16}=\frac{c^4}{10\times16} \qquad (\gamma)$$

复设环田积为 x，外圆积为 A_1，内圆积为 A_2，通径为 d_1，外周为 c_1，内周为 c_2，虚径为 d_2，则得

$$x=A_1-A_2=\sqrt{\frac{c_1^2d_1^2}{16}}-\sqrt{\frac{c_2^2d_2^2}{16}}.$$

两端平方，得

$$x^2=\frac{c_1^2d_1^2}{16}+\frac{c_2^2d_2^2}{16}-2\sqrt{\frac{c_1^2d_1^2}{16}}\sqrt{\frac{c_2^2d_2^2}{16}}.$$

移项后，两端再平方，得

$$\left(\frac{c_1^2d_1^2}{16}+\frac{c_2^2d_2^2}{16}-x^2\right)^2=4\frac{c_1^2d_1^2}{16}\cdot\frac{c_2^2d_2^2}{16},$$

化简，得

$$-x^4+2\left(\frac{c_1^2d_1^2}{16}+\frac{c_2^2d_2^2}{16}\right)x^2-\left(\frac{c_1^2d_1^2}{16}-\frac{c_2^2d_2^2}{16}\right)^2=0 \qquad (\delta)$$

而

$$\text{环田实径}=d_1-d_2 \qquad (\varepsilon)$$

【原草】　草曰：置大圆径 10 步自乘，得 100，为径幂．进位得 1000，为实．以 1 为隅，开平方，得 31 步．不尽 39 为分子，乃以隅生方，又益隅，共得 63，为分母．以分子与母求等，得 3，俱以 3 约之，母子得 21 分步之 13，为大圆周 31 步 21 分步之 13．次以径幂 100，乘前实 1000，得 10 万，以 16 约之，得 6250，为实．以 1 为隅，开平方，得 79 步，不尽 9，为分子，乃以隅生方，又增隅，得 159，为分母．以分子母求等，得 3，俱以 3 约母子，得 53 分步之 3，为大圆积 79 步 53 分步之 3．次置小圆田周 30 步，以自乘，得 900，为周幂．退位为 90，为径实．以 1 为隅，开平方，得 9 步．不尽 9，以隅生方，又益隅，得 19 分步之 9，为小圆径 9 步 19 分步之 9．次以周幂 900，乘前实 90，得 81000，以 16 约之，得 5062 步 5 分，为实．以 1 为隅，开平方，得 71 步．有不尽数 21 步 5 分为子，以隅生方，又益隅，得 143 为分母．以分子母求等，得 5 分，俱约之，得 286 分步之 43，为积．次置环田周 30 步自乘，得 900，为周幂．退位得 90，为实．以 1 为隅，开平方，得 9 步．不尽 9，为分子，以隅生方，并隅，得 19，为分母，直命之为环田通径 9 步 19 分步之 9．次以环周幂 900 乘环实 90，得 81000，以 16 约之，得 5062 步 5 分，为大率．次置环田虚径 8 步自乘，得 64，为虚幂．进位得 640，为实．以 1 为隅，开平方，得 25 步．不尽 15，为分子，以隅生方，又并隅，得 51

为分母．与子求等，得3，俱约之，得17分步之5，为环田内周25步17分步之5．次以虚幂64，乘周实640，得40960，以16约之，得2560，为小率．以小率减大率，余2502步5分，自乘，得6262506步2分5厘，为实．以小大二率并之，得7622步5分，倍之，得15245，为从上廉．以1为益隅，开玲珑三乘方，得20步．不尽324506步2分5厘为分子，续商无数，乃以益隅1，益下廉80，并之，得81，为减母．次以从上廉12845，并从方577800，得590645，以减母81减之，余590564，为分母．以分子求等，得2分5厘，俱约之，得2362256分步之1298025，为环田积20步2362256分步之1298025．次置环田通径9步19分步之9，以虚径8步减之，余1步19分步之9，为环田实径．合问．

问数图
外环田周 上 ≡○ 步
环田虚径 副 ⫼ 步
大圆田径 次 一○ 步
小圆田周 下 ≡○ 步
此图照问列位，以后照常运算，乃先置次大径照

大径 上 一○ 步
大径 副 一○ 步
大径幂 中 |○○ 步
实 次 一○○○ 步
隅 下 |
以上副自乘，得中，为实，进位为次，以一为下隅

商 ○
实 一○○○
○ 方
| 隅
商 ≡○
实 一○○○ 步
|||○○ 方
| 隅

商 三〇
|〇〇 余
|||〇〇 方
| 隅
商 三〇
|〇〇 实
⊥〇 方
| 隅

商 三|
|〇〇 实
⊥| 方
| 隅
商 三|
三Ⅲ 余
⊥| 方
| 隅

商 三|
三Ⅲ 余
⊥|| 方
| 隅
商 三|
实 三Ⅲ
子 ⊥|||
母 三
等

商 三|
一||| 子
二| 母

凡九变，至此得大，圆周，次求大圆积。

大圆积（原书"积"误为"周"）

经幂
上 |〇〇步 周实
副 一〇〇〇步 得
中 一〇〇〇〇〇步
次 一T 法
下 ⊥||≡〇步 实
| 隅

上、副自乘得中，以次约之，得下为实

商 〇
实 ⊥||≡〇
〇 方
| 隅
商 ≐〇
实 ⊥||≡〇
╥〇〇 方
| 隅

商 ≐〇
一|||≡〇 余
╥〇〇 方
| 隅
商 ≐〇
一|||≡〇 实
一|||〇 方
| 隅

商○　实　○方　隅　商　○实　方　隅

商　实　方　隅　商　实　方　隅

商　实　余　母　○　商　余子　母　约

大圆积　步　子　母　○　凡十一变，至此得大圆积。次求小圆径。

小圆周○步　小周○步　小周幂○径　○　商○　径○实　○方　隅

自乘

商　实○　○方　隅　商　实○　方　隅

商　余　方　隅　商　余　方　隅

小圆径　子　母　凡七变，至此得小圆径。次求小圆积，

小周幂

小径实

实

法

实

隅

大率图

商

方

隅

商

实

方

隅

商

实

余

方

隅

商

实

方

隅

商

实

方

隅

商

实

方

隅

商

实

余

方

隅

商

实

方

隅

商

实

余

母

等

小圆积

步

子

母

一十变，得小

圆积·次求环

田通径

当求环田通径，盖环之外周30步，与小圆田外周同，则不过与前七变诸图一理，兹不复繁．乃求实径．

凡九变，得环田内周．次求环积．

虚率 因实 实 法 小率

只求此小率，与射大率两者求实径。

大率 小率 余 余

二率相减，得余，以余自乘，得后实。

实 大率 小率 得 倍数

并二率为得数，倍得数为从上廉，以一为益隅。

商 实 方 从上廉 下廉 益隅

从上廉超一位，益隅超三位。

商 实 方 上廉 下廉 益隅

乃商置二十步。

商 实 方 上廉 下廉 益隅

以商生隅，入下廉。

商 𝍪〇 𝍥𝍯𝍥𝍪𝍤〇𝍥𝍪𝍤 实 〇 方 𝍠𝍯𝍧𝍫𝍤 上廉 𝍡〇 下廉 𝍠 益隅 以商与上廉生方	商 𝍪〇 𝍥𝍯𝍥𝍪𝍤〇𝍥𝍪𝍤 实 〇 方 𝍠𝍰𝍡𝍫𝍤 正廉 𝍣〇〇 负廉 𝍡〇 下廉 𝍠 益隅 以负廉与正廉相消，得正上廉	商 𝍪〇 𝍥𝍯𝍥𝍪𝍤〇𝍥𝍪𝍤 实 〇 方 𝍠𝍰𝍡𝍫𝍤 上廉 𝍡〇 下廉 𝍠 益隅 以下廉生负廉。

商 𝍪〇 𝍫𝍡𝍰𝍤〇𝍥𝍪𝍤 余 𝍪𝍰𝍥𝍰〇〇 方 𝍠𝍯𝍧𝍫𝍤 上廉 𝍣〇 下廉 𝍠 益隅 以下廉与商，生负上廉	商 𝍪〇 𝍫𝍡𝍰𝍤〇𝍥𝍪𝍤 余 𝍡𝍰𝍥𝍰〇〇 方 𝍠𝍯𝍧𝍫𝍤 上廉 𝍡〇 下廉 𝍠 益隅 又以商生隅，入下廉	商 𝍪〇 𝍥𝍯𝍥𝍪𝍤〇𝍥𝍪𝍤 实 𝍡𝍰𝍥𝍰〇〇 方 𝍠𝍯𝍧𝍫𝍤 上廉 𝍡〇 下廉 𝍠 益隅 以方法命商，除实

商 𝍪〇 𝍫𝍡𝍫𝍣〇𝍥𝍪𝍣 余 〇𝍪𝍦𝍫〇〇 方 𝍠𝍫〇𝍫𝍣 上廉 𝍣〇 下廉 𝍠 益隅 商隅又相生，入下廉。	商 𝍪〇 𝍫𝍡𝍫𝍣〇𝍥𝍡𝍣 余 𝍡𝍫𝍥𝍫〇〇 方 𝍠𝍫〇𝍫𝍣 上廉 𝍣〇 下廉 𝍠 益隅 商与上廉生方。	商 𝍪〇 𝍫𝍡𝍫𝍣〇𝍥𝍪𝍣 余 𝍡𝍫𝍥𝍫〇〇 方 𝍠𝍫𝍦𝍫𝍣 正上廉 𝍦〇〇 负上廉 𝍣〇 下廉 𝍠 益隅 负上廉与正廉相消。

商 𝍪〇 𝍫𝍡𝍫𝍣〇𝍥𝍪𝍣 余 〇𝍪𝍦𝍫〇〇 方 𝍠𝍪𝍦𝍫𝍣 上廉 𝍥〇 下廉 𝍠 益隅 商又与隅生，入下廉。	商 𝍪〇 𝍫𝍡𝍫𝍣〇𝍥𝍪𝍣 余 〇𝍪𝍦𝍫〇〇 方 𝍠𝍫〇𝍫〇 正上廉 𝍩𝍡〇〇 负上廉 𝍥〇 下廉 𝍠 益隅 负廉与正廉相消。	商 𝍪〇 𝍫𝍡𝍫𝍣〇𝍥𝍪𝍣 余 〇𝍪𝍦𝍫〇〇 方 𝍠𝍫〇𝍫𝍣 上廉 𝍥〇 下廉 𝍠 益隅 商又与下廉生负廉。

商二〇

余

方

上廉

下廉

益隅

方一退，上廉再退，下廉三退，隅四退。

商九步二〇

余

方

上廉

下廉

益隅

无商，以上廉并入方，隅并下廉。

商二〇步

余

从方正廉

〇

下廉益隅

〇

益隅并负廉，与正方廉相消，为命母。

商二〇步

余

母

〇

〇

〇

求等，约之。

商二〇步

余

母

等数为法

得数。

环田积二〇步

子

母

开三乘方，凡二千变，至此得环田积数。

所求是实径者.但以虚径减通径,之余1步19分步之9,为环田实径.

【新释】 已知：大圆径=10步，代入(α)式，得大圆周：

$$c^2=10\times10^2=1000.$$

1	+0	−1000	
	30	+900	30
1	+30	−100	
	30		
1	+60	−100	
	1	+61	1
1	+61	−39	
	1		
1	+62	−39	

因得：

$$c=31\frac{39}{1+62}=31\frac{13}{21}\text{步}.$$

由(γ)式，得大圆积：

$$A^2=\frac{10^2\times10\times10^2}{16}=6250.$$

1	+0	−6250	
	70	+4900	70
1	+70	−1350	
	70		
1	+140	−1350	
	9	+1341	9
1	+149	−9	
	9		
1	+158	−9	

因得：

$$A=79\frac{9}{1+158}=79\frac{3}{53}\text{步}.$$

又知：小圆周＝30 步，代入(β)式，得小圆径：

$$d^2=\frac{30^2}{10}=90.$$

1	+0	−90	
	9	+81	9
1	+19	−9	
	9		
1	+18	−9	

因得：　$d=9\frac{9}{1+18}=9\frac{9}{19}$ 步.

用(γ)式，求小圆积：

$$A^2=\frac{30^2\times 90}{16}=5062.5.$$

1	+0	−5062.5	
	70	+4900	70
1	+70	−162.5	
	70		
1	+140	−162.5	
	1	+141	1
1	+141	−21.5	
	1		
1	+142	−21.5	

因得：　$A=71\frac{21.5}{1+142}=71\frac{43}{286}$ 步.

复知：环田周＝30 步，与小圆周同.

$\therefore$　通径：$d_1=9\frac{9}{19}$ 步.

次求环内周：已知虚径＝8 步，代入(α)式，得

$$c_2^2=10\times 8^2=640.$$

1	+0	−640	
	20	+400	20
1	+20	−240	
	20		
1	+40	−240	
	5	+225	5
1	+45	−15	
	5		
1	+50	−15	

因得: $c_2=25\frac{15}{1+50}=25\frac{5}{17}$ 步。

复次求环积: 应用(δ)式, 已知:

$$大率=\frac{c_1^2d_1^2}{16}=5062.5,$$

$$小率=\frac{c_2^2d_2^2}{16}=\frac{640\times 64}{16}=\frac{40960}{16}=2560.$$

故所求的方程式为

$$-x^4+2(5062.5+2560)x^2-(5062.5-2560)^2=0.$$

化简, 得

$$-x^4+15245x^2-6262506.25=0.$$

−1	+0	+15245	+0	−6262506.25	
	−20	−400	+296900	+5938000	20
−1	−20	+14845	+296900	−324506.25	
	−20	−800	+280900		
−1	−40	+14045	+577800		
	−20	−1200			
−1	−60	+12845			
	−20				
−1	−80	+12845	+577800	−324506.25	

因得：
$$x=20\frac{324506.25}{-1-80+12845+577800}$$
$$=20\frac{324506.25}{590564}=20\frac{1298025}{2362256}\text{步}.$$

由(8)式，得

$$\text{环田实径}=9\frac{9}{18}-8=1\frac{9}{19}\text{步}.$$

27. 围 田 先 计

问有草荡一所，广三里，纵一百十八里，夏日水深二尺五寸，与溪面等平．溪阔一十三丈，流长一百三十五里入湖．冬日水深一尺，欲趁此时，围裹成田，于荡中顺纵开大港一条，磬折通溪．顺广开小港二十四条，其深同．其小港阔，比大港六分之一，大港深，比大港面三分之一．大小港底，各不及面一尺，取土为埂，高一丈，上广六尺，下广一丈二尺，荡纵当溪，其岸高广倍其埂数，上下流各立斗门一所，须令田内止容水八寸，遏余水复溪入湖．里法三百六十步，步法五尺．欲知田积、埂土积、大小港底面深阔、冬夏积水、田港容水、遏水、溪面泛高、各几何？

答曰：田积，一千八百八十四顷八十三亩九十六步(原答：一千八百六十六顷八亩二十四步．)．

埂土积，九百六十五亿五千二百万立方寸．

大港

面阔，三丈五尺四寸(原答：六丈一尺七寸．)．

底阔，三丈四尺四寸(原答：六丈七寸．)．

深，一丈一尺八寸(原答：六尺八寸．)．

小港

面阔，六尺三寸．六分寸之一．(原答：一丈二寸．六分寸之五．)

底阔，五尺三寸．六分寸之一．(原答：九尺二寸．六分寸之五．)

深，一丈一尺八寸(原答：六尺八寸．)．

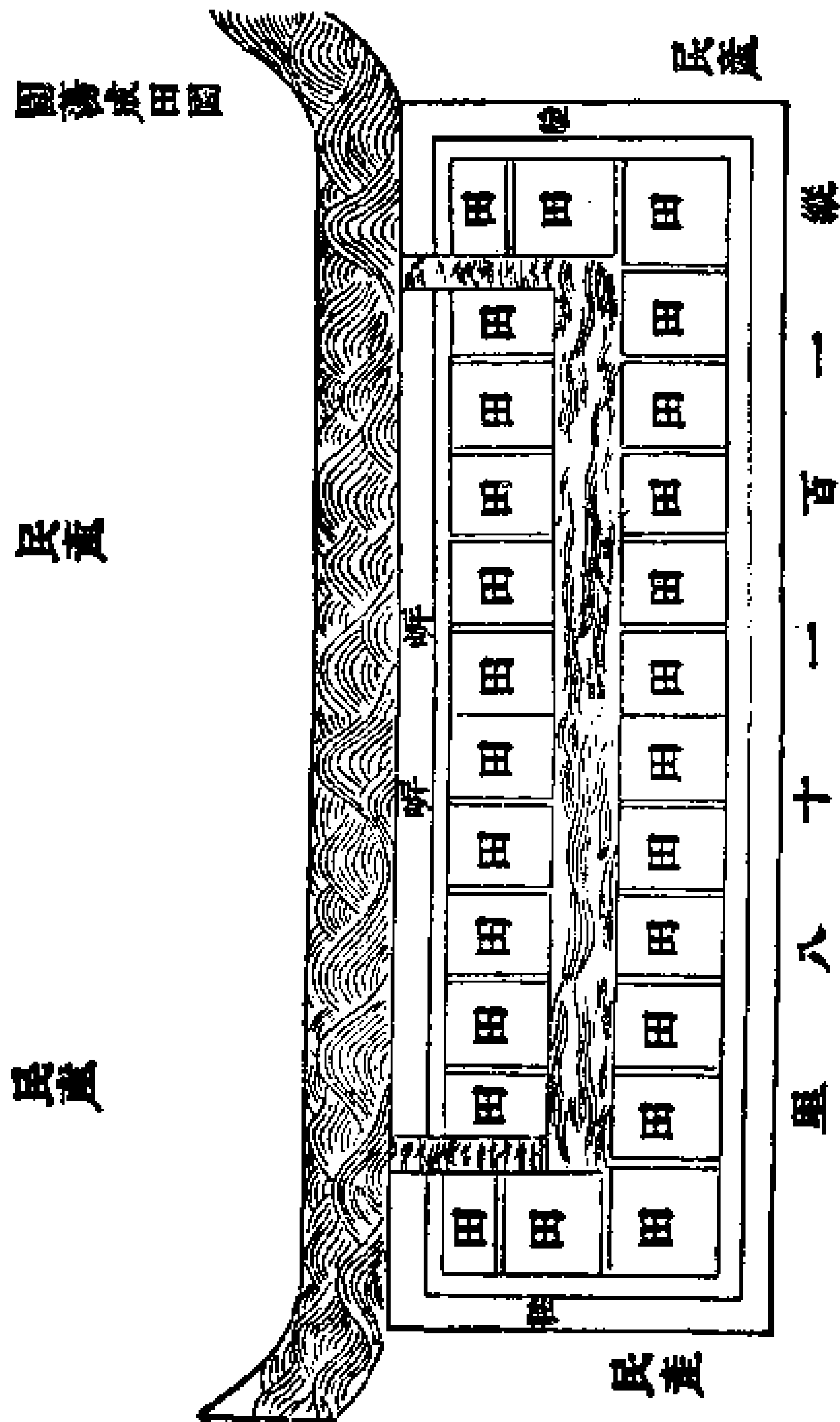


图20 围荡成田图

夏积水，二万八千六百七十四亿万立方寸．

冬积水，一万一千四百六十九亿六千万立方寸．

田容水，九千一百一十三亿四千七百二十万立方寸(原答：九千七十二亿六千九百七十二万立方寸．)．

港容水，九百六十五亿五千二百万立方寸．港上者在田内．

遏出水，一万八千五百九十五亿八十万立方寸(原答：一万八千六百三十五亿七千八百八十八万立方寸．)．

溪面泛高，一尺三寸．八千七百七十五分寸之七百九．(原答：一尺三寸．一十三万一千六百二十五分寸之一万四千四百一十一．)．

【注1】　原答港深六尺八寸，与原设“大港深，比大港面三分之一”不符．

【注2】　沈钦裴氏曾对本问作出详尽的校正，惟术数均与此稍有差异．

【注3】　关于溪面泛高，秦氏似乎是假定在每岁八节中，平均每节可满荡一次，而遏出水则是按全年各日平均复溪入湖的．这样的假定，显然是根据经验和想像而给出的．但泛高(平均泛高)应与湖水表面积的大小，有着密切的关系，那样的计算，是很复杂的．所以本问的溪面泛高，是一个仅供参考的近似值．

术曰：以商功求之．步里法皆先化寸，各通广纵为率，二率相并为和．二率相乘为寄．三因纵率于上．倍和，加上，为段．并埂二广，乘半埂高，又乘段，为土积，亦为港容水．以阔母乘土积，为实．以阔子乘小港数，又乘广率，为泛．阔母乘纵率，并泛，为堡．以半不及乘之．为益方．又置堡，以深母乘之，深子除之(原无“为堡，以半不及乘之．…．深子除之．”诸语，原仅一“共”字．)，为隅．开平方，所得至寸收之．(此处原有“为堡，以深子乘堡，为实．以深母除之”．诸语．)，为大小港等深．以深母因等深，又以深子除之，为大港面．内减半不及数，余以阔子乘之，阔母除之，又加半不及数，为小港面(此段原为“以深母因堡，为实．以深子除之，为中．以半

不及加中，为大港面．以阔母除之，为小港面．”）二面各减不及，为底，倍和加纵，以埂下广乘之，为址（原为“以埂下广乘段，为址．”）．置小港数，乘广率，以阔子乘之，阔母除之，并纵率，复以大港面乘之，为港平（原为“以大港面乘隅，为实．以阔母除之，为港平．”）．以港平并址，减寄，余为田积．以址减寄，余乘容水，为田容水．以夏冬水深乘寄，得夏冬积水．以田容水并港容水，减夏积水，余为遏出水．以八节乘之，为实．以溪阔乘流长，又乘岁日，为法．除之，得溪面泛高．

【新释】　设荡纵为 a，荡广为 b，埂高为 h，上广为 d_1，下广为 d_2，因岸高广倍其埂数，所以土积（亦即港容水．）的略值为

$$v=[3a+2(a+b)](d_1+d_2)\cdot\frac{h}{2} \qquad (\alpha)$$

又设共深为 H，底面不及数为 r，且知

$$\frac{深}{大港面}=\frac{p_1(深子)}{q_1(深母)},$$

故有

$$大港阔(中阔)=\frac{H}{p_1/q_1}-\frac{r}{2}.$$

次设

$$\frac{小港阔}{大港阔}=\frac{p_2(阔子)}{q_2(阔母)},$$

则得

$$小港阔(中阔)=\left(\frac{H}{p_1/q_1}-\frac{r}{2}\right)\frac{p_2}{q_2}.$$

又设小港数为 m，则有

$$v=\left(\frac{p_2}{q_2}mb+a\right)\left(\frac{H}{p_1/q_1}-\frac{r}{2}\right)H.$$

化简，得

$$\frac{q_1}{p_1}(p_2mb+q_2a)H^2-\frac{r}{2}(p_2mb+q_2a)H=q_2v \qquad (\beta)$$

共深既经求出，则可得

$$大港面=\frac{H}{p_1/q_1} \qquad (\gamma)$$

$$大港底=\frac{H}{p_1/q_1}-r \qquad (\delta)$$

$$小港面=\left(\frac{H}{p_1/q_1}-\frac{r}{2}\right)\frac{p_2}{q_2}+\frac{r}{2} \qquad (\varepsilon)$$

$$小港底=\left[\left(\frac{H}{p_1/q_1}-\frac{r}{2}\right)\frac{p_2}{q_2}+\frac{r}{2}\right]-r \qquad (\zeta)$$

塍与岸所占面积为址，其略值为

$$A_1=[2(a+b)+a]d_2 \qquad (\eta)$$

大小港所占面积为港平，其值为

$$A_2=\left(\frac{p_2}{q_2}mb+a\right)\frac{H}{p_1/q_1} \qquad (\theta)$$

次设田积为 A_3，荡积为 A，则

$$A_3=A-(A_1+A_2)=ab-(A_1+A_2) \qquad (\varsigma)$$

又设止容水深为 k，则

$$田容水=k(A-A_1) \qquad (\kappa)$$

复设夏日水深为 K_1，冬日水深为 K_2，则得

$$夏积水=K_1A \qquad (\lambda)$$

$$冬积水=K_2A \qquad (\mu)$$

$$遏出水=K_1A-[v+k(A-A_1)] \qquad (\nu)$$

更设溪阔为 B，流长为 L，并假定全年八节，平均每节可满荡一次，而遏出水则按全年各日平均复溪入湖，于是可得

$$溪面(平均)泛高=\frac{8\{K_1A-[v+k(A-A_1)]\}}{360BL}$$

$$=\frac{K_1A-[v+k(A-A_1)]}{45BL} \qquad (\xi)$$

【原草】 草曰：先通步法为 50 寸，通 360 步，得 18000 寸，为里法．以里法通荡广 3 里，得 54000，为广率．又通荡纵 118 里，得 2124000，为纵率，以纵率并广率，得 2178000，为和．以纵率乘广率，得 11469600 万，为寄．3 因纵率 2124000，得 6372000 于上．倍和 2178000，得 4356000，加上，得 10728000，为段．次以塍上广

6 尺并下广 1 丈 2 尺，得 18 尺，乘半堧高 50 寸，得 9000 寸．又乘段 10728000，得 9655200 万，为土积，亦为港容水．以港阔母 6 因土积，得 57931200 万，为实．以阔子 1 乘小港 24 条，又乘广率 54000，得 1296000，为泛．以阔母 6，因纵率 2124000，得 12744000，并泛，得 1404 万，为堡．以半不及 5 寸乘之，得 7020 万，为益方．又置堡 1404 万，以深母 3 乘之，得 4212 万，以深子 1 除之，仍为 4212 万（原无"为堡，以半不及 5 寸乘之，…．仍为 4212 万"诸语．），为隅．今隅方实可约，求等，得 108 万，俱以约之，实得 536400，益方得 65，隅得 39（原无"今隅方实可约，…隅得 39"诸语．）．开平方，得 118 寸（原为"203 寸"），不尽 1034（原为"7376400"），弃之（原为"收为所得 1 寸"），乃得 118 寸，为大小港等深（原为"乃得 204 寸，为堡．以深子 1 乘之，以深母 3 除之，得 6 尺 8 寸，为大小港等深．"）．次以深母 3，因等深 118 寸，得 354 寸，展为 3 丈 5 尺 4 寸，为大港面阔．内减半不及 5 寸，余 3 丈 4 尺 9 寸，以阔子 1 乘之，阔母 6 除之，得 5 尺 8 寸 6 分寸之 1，又加半不及 5 寸，得 6 尺 3 寸 6 分寸之 1，为小港面（原为"次以深母 3，因堡 204 寸，得 612 寸，为实．如深子 1 而一，得 6 丈 1 尺 2 寸，为中．以不及 1 尺，半之，得 5 寸，加中，得 6 丈 1 尺 7 寸，为大港面阔．如母 6 而一，得 1 丈 2 寸 6 分寸之 5，为小港面．"）．以不及 1 尺．各减大小港面，得 3 丈 4 尺 4 寸（原为"6 丈 7 寸"），为大港底．得 5 尺 3 寸 6 分寸之 1（原为"9 尺 2 寸 6 分寸之 5"），为小港底．次倍和 2178000，得 4356000，并纵 2124000，得 648 万，以堧下广 1 丈 2 尺乘之，得 77760 万，为址（原为"次以堧下广 1 丈 2 尺，乘段 10728000 寸，得 128736 万．为址．"）．次以小港数 24，乘广率 54000，得 1296000，以阔子 1 乘之，以阔母 6 除之，得 216000，并纵 2124000，得 234 万，以大港面 3 丈 5 尺 4 寸乘之，得 82836 万，为港平（原为"以大港面 6 丈 1 尺 7 寸，乘隅 1404 万，得 866268 万，为实．以阔母 6 除之，得 144378 万，为港平．"）．以并址 77760 万（原为"128736

万."), 得160596万(原为"273114万"), 减寄11469600万, 余11309004万(原为"余11196486万."),为田积寸. 以步法50寸自乘,得2500,除积寸, 得45236016步(原为"44785944步."), 为田积步. 以亩法240步约之,得1884顷83亩,不尽96步(原为"1866顷8亩,不尽24步."),为田积. 以址77760万(原为"128736万."),减寄11469600万,余11391840万(原为"余11340864万."),乘令容水8寸, 得91134720万(原为"90726912万."), 为田容水. 次以夏水深2尺5寸, 乘寄11469600万, 得28674亿万寸, 为夏积水. 次以冬水深1尺乘寄,得114696000万寸,为冬积水. 乃以田容水91134720万(原为"90726912万."), 并港容水9655200万, 得100789920万(原为"100382112万."),减夏积水28674亿万寸,余185950080万(原为"余186357888万."),为遏出水. 当以8节乘之,岁日360除之,为实,今从省. 先以8节约岁日360, 得45, 为除率. 次以里法18000寸,通流长135里, 得243万, 又乘溪阔13丈,得315900万,以乘除率45,得14215500万, 为法. 除遏出水185950080万(原为"186357888万."), 得1尺3寸, 为溪面泛高. 不尽1148580万(原为"1556388万."), 与法14215500万求等,得1620万(原为"108万"), 俱以约之, 为8775分寸之709(原为"131625分寸之14411"),为泛高寸下分子(原脱"子"字),母之数. 合问.

【新释】 已知: $a=118$ 里$=2124000$ 寸, $b=3$ 里$=5400$ 寸, $d_1=60$ 寸, $d_2=120$ 寸, $h=100$ 寸, 代入(α)式, 得土积(即港容水.):

$$v=\{3\times2124000+2(2124000+54000)\}\times(60+120)\times\frac{100}{2}$$

$$=10728000\times9000=96552000000 \text{ 立方寸.}$$

又知 $m=24$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{3}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{6}$, $r=10$ 寸, 代入(β)式, 得

$$3(1296000+12744000)H^2-5(1296000+12744000)H$$
$$=6\times96552000000$$

即 $$42120000H^2-70200000H=579312000000,$$

化简，得

$$39H^2-65H-536400=0.$$

39	−65	−536400	
	3900	+383500	100
39	+3835	−152900	
	3900		
39	+7735	−152900	
	390	+81250	10
39	+8125	−71650	
	390		
39	+8515	−71650	
	312	+70616	8
39	+8827	−1034	
	312		
39	+9139	−1034	

$$\therefore\quad H=118\frac{1034}{39+9139}=118\frac{1034}{9178}\doteq118\text{ 寸}.$$

由(γ)至(ζ)各式，得

$$\text{大港面}=3\times118=354\text{ 寸},$$

$$\text{大港底}=354-10=344\text{ 寸}.$$

$$\text{小港面}=(354-5)\times\frac{1}{6}+5=63\frac{1}{6}\text{ 寸},$$

$$\text{小港底}=63\frac{1}{6}-10=53\frac{1}{6}\text{ 寸}.$$

由(η)式，得址：

$$A_1=[2(2124000+54000)+2124000]\times 120$$

$$=6480000\times 120=777600000 \text{ 平方寸.}$$

由(θ)式，得港平：

$$A_2=\left(\frac{1}{6}\times 24\times 54000+2124000\right)\times 354$$

$$=2340000\times 354=828360000 \text{ 平方寸.}$$

由(s)式，得田积：

$$A_3=2124000\times 54000-(777600000+828360000)$$

$$=114696000000-1605960000$$

$$=113090040000 \text{ 平方寸}=45236016 \text{ 步}$$

$$=1884 \text{ 顷 } 83 \text{ 亩 } 96 \text{ 步.}$$

由(κ)式，得

$$\text{田容水}=k(A-A_1)=8(114696000000-777600000)$$

$$=8\times 113918400000=911347200000 \text{ 立方寸.}$$

又知　$K_1=25$ 寸，$K_2=10$ 寸，代入(λ)，(μ)二式，得

$$\text{夏积水}=25\times 114696000000$$

$$=2867400000000 \text{ 立方寸,}$$

$$\text{冬积水}=10\times 114696000000$$

$$=1146960000000 \text{ 立方寸.}$$

由(ν)式，可得

$$\text{遏出水}=2867400000000-(96552000000+911347200000)$$

$$=2867400000000-1007899200000$$

$$=1859500800000 \text{ 立方寸.}$$

次求溪面泛高：已知：$B=13$ 丈，$L=135$ 里，因得

$$\text{溪面积}=BL=1300\times 135\times 360\times 50$$

$$=3159000000 \text{ 平方寸.}$$

由(ξ)式，得

$$溪面(平均)泛高=\frac{18595008000000}{45\times 3159000000}$$

$$=13\frac{11485800000}{142155000000}=13\frac{709}{8775}寸.$$

第四章 测 望 类

本章以勾股重差为主，正负开方次之，是利用相似三角形的相应线段成比例的性质，以代数方法来解决几何上的计算问题，或者说应用代数和几何来解决三角测量的问题，和刘徽的《海岛算经》(263年)异曲同工．尤以"临台测水""陡岸测水""望敌圆营""表望浮图"等问，不仅是实践中常常可以遇到的问题，而且是设问别致，富饶趣味．同时在本章各问中，不时提到"…重差入之．"这足证秦氏是根据"重差术"(《海岛算经》)的精神，来研究有关测望问题的．

本章除"遥度圆城""望敌远近""古池推元"三问外，其余各问，术数各有小的错误，这可以说明秦氏在几何方面的研究，是远远地落后于他在代数方面的成就的．

第七卷 凡 三 问

28. 望 山 高 远

问名山去城不知高远，城外平地有木一株，高二丈三尺，假为前表．乃立后表，与木齐高，相去一百六十四步．先退前表三丈九寸，次退后表三丈一尺三寸，斜望山峰，各与其表之端参合．人目高五尺，里法三百六十步，步法五尺．欲知山高及远各几何？

答曰：高二十里一百八十一步(原答：二十里半零三步．五分步之三．)．远三十五里二百三十三步(原答：二十七里三百二十八步．五百七十五分步之六十七．)．

术曰：以勾股求之，重差入之．置二退表相减，余为高法．通表间为寄（"为寄"原系"并法于上"），以目高减表高，余乘寄于上．以目高乘法，并（原无"寄于上．以目高乘法，并"诸字句．）上，为高实．实如法而一，得山高．以表间乘退后表（原为"以法乘表高，为远法．以退后表乘高实．"），为远实．实如前（原无"前"字．）法而一，得山去．

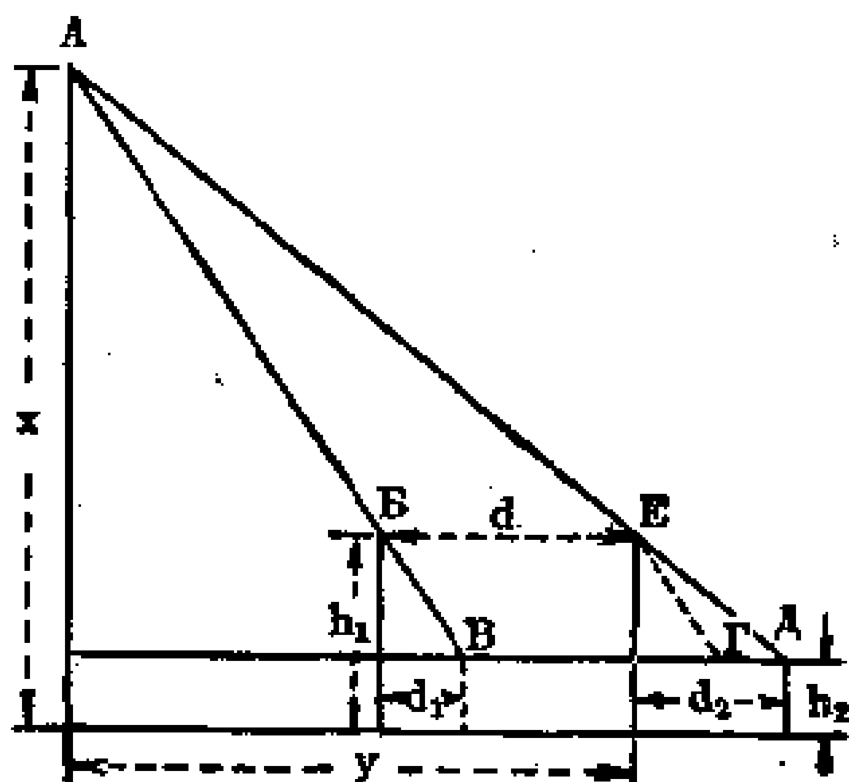


图 21

【新释】 设山高为 x，后表去山为 y，表高为 h_1，目高为 h_2，表间为 d，退前表为 d_1，退后表为 d_2，如21图所示，则由相似三角形，可得

$$\frac{x-h_2}{h_1-h_2}=\frac{AB}{БB}=\frac{AB}{EГ}=\frac{BД}{ГД}=\frac{d+d_2-d_1}{d_2-d_1},$$

$$\therefore\quad x=\frac{(h_1-h_2)(d+d_2-d_1)}{d_2-d_1}+h_2$$

$$=\frac{d(h_1-h_2)+h_1(d_2-d_1)}{d_2-d_1}\qquad(\alpha)$$

又因

$$\frac{y}{d}=\frac{d_2}{d_2-d_1},$$

$$\therefore\quad y=\frac{dd_2}{d_2-d_1}\qquad(\beta)$$

【注1】 秦氏本问致误的原因，是由

$$\frac{x}{h_1-h_2}=\frac{d+d_2-d_1}{d_2-d_1}\qquad(\gamma)$$

而求得山高和由

$$\frac{y}{d_2}=\frac{x}{h_1}\qquad(\delta)$$

而求得山去的.

【注 2】 沈钦裴氏仅改正了求山去的术数，对于山高未加改正.

【原草】 草曰：置后退表 3 丈 1 尺 3 寸，减前退表 3 丈 9 寸，余 4 寸，为高法. 置表间 164 步，以步法 50 寸通之，得 8200 寸，为寄. 以目高 5 尺，减表高 2 丈 3 尺，余通之为 180 寸，以乘寄，得 1476000 寸于上. 以目高 50 寸，乘法 4 寸，得 200 寸，并上，得 1476200 寸(原为"置表去木 164 步，以步法 50 寸通得 8200 寸，为表间. 并法 4 寸，得 8204 寸于上. 以目高 5 尺，减表高 2 丈 3 尺，余通之为 180 寸，乘上，得 1476720 寸."), 为高实. 实如高法 4 寸而一，得 369050 寸(原为"369180 寸."), 为积寸. 次以步法 50 寸约之，得 7381 步(原为"7383 步 5 分步之 3".), 次以里法 360 步约之，得 20 里 181 步(原为"得 20 里 183 步 5 分步之 3".), 为山高. 次置表间 8200 寸，以乘退后表 313 寸，得 2566600 寸(原为"次以法 4 寸乘表高 2 丈 3 尺，得 920，为远法. 以退后表 3 丈 1 尺 3 寸，乘高实 1476720 寸，得 462213360 寸."), 为远实. 实如前("前"原作"远")法 4 寸(原为"920 寸.")而一，得 641650 寸(原为"502405 寸 23 分寸之 19".), 为积寸. 乃以步法 50 寸约之，得 12833 步(原为"乃以步法 50 寸，乘远法 920，得 46000 寸，为法，亦除远实，得 10048 步，不尽 5360，与法求等，得 80，俱以约之，为 575 分步之 67".), 又以里法 360 步，约得 35 里 233 步(原为 27 里 328 步 575 分步之 67".), 为山后表人立望处. 算图如后：

得 ‖〇〇 寸	上 I×ㅠ⊥〇〇〇 寸	目高 ≣〇	表间 I⊥× 步	上　后退表 Ⅲ一Ⅲ 寸
上 I×ㅠ⊥〇〇〇 寸	目高 ≣〇 寸	表高 ‖〓〇	步法 ≣〇 寸	中　前退表 Ⅲ〇ㅠ 寸

余为法 4寸	下	表间 8200寸	余 180寸	法 4寸	远实 1476200寸
以上减中，余下为法。		以上乘中，得下为寄。	以上减中，得下。	以前下乘寄，得上。	

乃以得 200 寸，并上 1476000 寸，得 1476200 寸(原为"乃以上位 8204 寸，乘中 180 寸，得 1476720 寸。")，为高实。

	商	高积	表间	山去		山去	里法
上	商 0	高积 369050寸	表间 8200寸	山去 641650寸	上	山去 641650寸	里法 360步
中	高实 1476200寸	步法 50寸	退后表 313寸	远实 2566600寸	中	步法 50寸	山去 35里
下	高法 4寸	高步 7381步	远实 2566600寸	法 4寸	下	山去 12833步	233步
	以下除上中位，得后图数。	以中除上，得下位山高步数。	以上乘中，得下。	以下除中，得上。		以中除上，得下。	

乃以上除前下，得中位山去里数及步数。合问(此处原有两段文字叙述：1．"乃以步法 50 寸乘中位远法 920 寸，得下位 46000 寸为后图中位步寸法。"2．"乃以中除上得下位里法及零步，其不尽寸与法求等，得 80，俱约之，为步分母子之数。"算图均系照改正数字列出者。)。

【新释】 已知：$h_1=230$ 寸，$h_2=50$ 寸，$d_1=309$ 寸，$d_2=313$ 寸，$d=8200$ 寸。代入(α)，(β)二式，得

$$x=\frac{8200\times(230-50)+50\times(313-309)}{313-309}$$

$$=\frac{1476000+200}{4}=369050\text{ 寸}=7381\text{ 步}$$
$$=20\text{ 里 }181\text{ 步}.$$
$$y=\frac{8200\times313}{313-309}=\frac{2566600}{4}=641650\text{ 寸}=12833\text{ 步}$$
$$=35\text{ 里 }233\text{ 步}.$$

29. 临台测水

问临水城台，立高三丈，其上架楼，其下址侧脚阔二尺，获下排沙下椿，去址一丈二尺，外椿露土高五尺，与址下平．遇水涨时，浸至址．今水退不知多少，人从楼上栏杆腰串间，虚驾一竿出外，斜望水际，得四尺一寸五分，乃与竿端参合．人目高五尺，欲知水退立深，涸岸斜长自台址至水际，各几何？

答曰：水退立深，一丈七尺．一百五十七分尺之三十六．（原答：一丈五尺，一百五十七分尺之一百三十五．）．

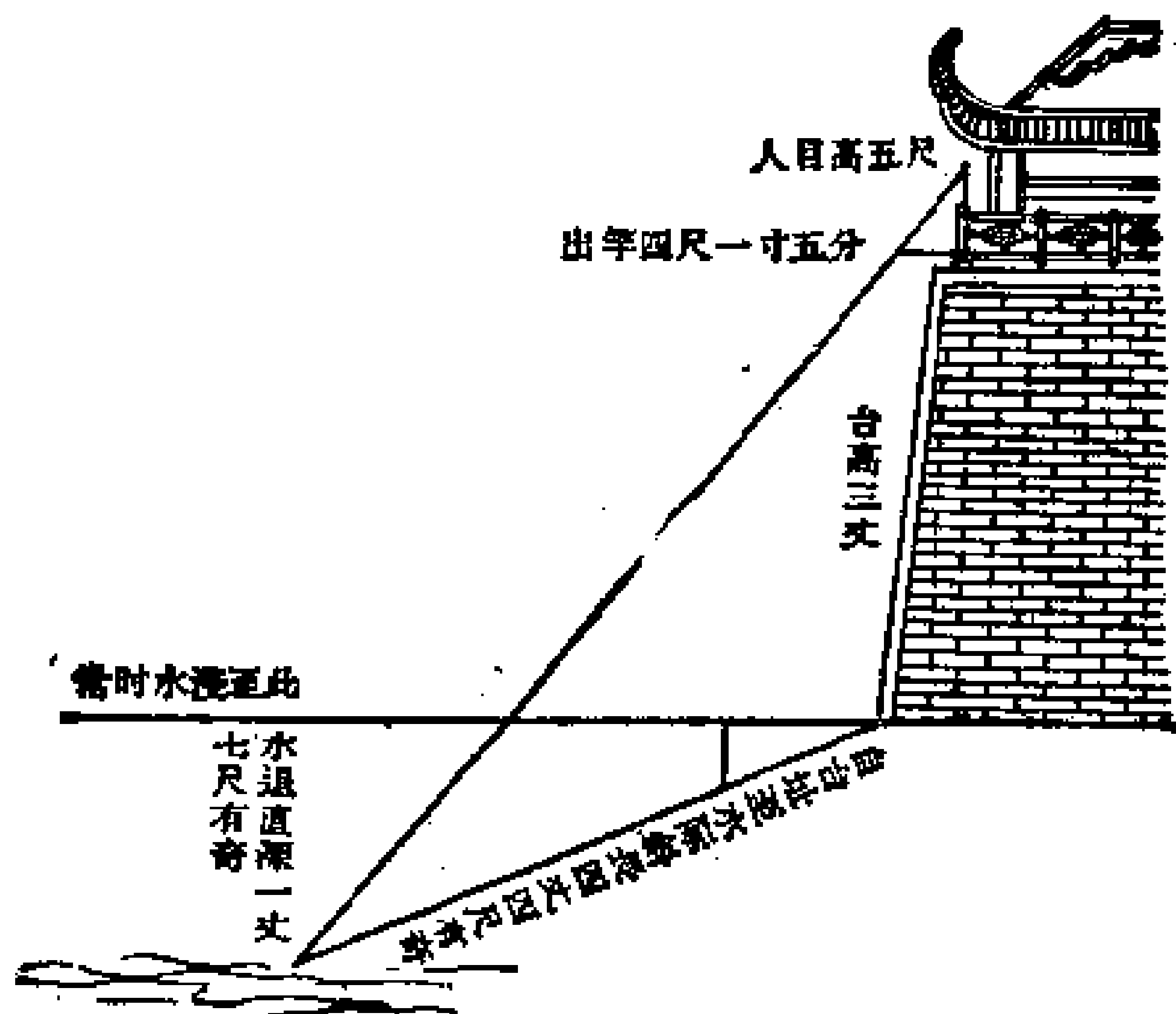


图 22　临台测水

涸岸自台址至水际斜长，四丈四尺，一百五十七分尺之一百二十五(原答：四丈一尺．一百五十七分尺之三十七．)．

术曰：以勾股变法兼少广求之．求涸岸斜长，置台高，并目高，以乘出竿，为上．以目高乘脚阔，减上，余自乘，为段．以去址幂并岸高幂，乘段，为峻实(原为“置出竿，乘台高，为段．以去基乘段，为阔泛．以岸高乘段，为浅泛．以目高乘去基，为约泛．三泛可约者，约之，为定率．不可约，径为率．以阔率自乘，为阔幂．以浅率自乘，为浅幂．并阔浅二幂，共为峻幂。复乘阔幂于上，以台高幂乘上，为峻实．”)．次置去址乘目高为寄，以出竿乘岸高，减寄，余自乘，为峻隅(原为“次以阔率乘浅率，为寄．以台高数乘阔率，又乘约率，得数，内减寄，余自乘，为峻隅．”)．验峻实峻隅两者可约，求等约之，为峻定实峻定隅．开同体连枝平方，得峻岸斜长．同体格，先以隅开平方，得数，名同隅．次以定实开平方(原为“以同隅乘定实，开之．”)，得数，为实．以同隅为法，除之，得峻斜．求水退深，置岸高幂乘段(原为“峻定实”．)为深实．以峻隅(原为“以去岸幂并岸高幂，乘峻定隅．”)为深隅，其深实深隅，可约，约之，仍以同体格入之．开连枝平方，得水退深．

【新释】 如图23，设目高为 h_1，岸高为 h_2，台高为 h，水退立深为 x，涸岸斜长为 y，出竿为 a_1，去址为 a_2，脚阔为 a_3，退水去址的水平距离为 a，则由相似三角形，可得

$$\frac{x}{h_2}=\frac{y}{\sqrt{a_2^2+h_2^2}}$$

或

$$x=\frac{h_2 y}{\sqrt{a_2^2+h_2^2}} \qquad (\alpha)$$

$$\frac{a+a_3}{x+h+h_1}=\frac{a_1}{h_1} \qquad (\beta)$$

$$\frac{a}{a_2}=\frac{y}{\sqrt{a_2^2+h_2^2}}$$

图　23

或

$$a=\frac{a_2 y}{\sqrt{a_2^2+h_2^2}} \tag{γ}$$

把(α)，(γ)二式代入(β)式，消去 a，x，得

$$\frac{a_2 h_1 y}{\sqrt{a_2^2+h_2^2}}+a_3 h_1=\frac{a_1 h_2 y}{\sqrt{a_2^2+h_2^2}}+a_1(h+h_1)$$

即

$$(a_2 h_1-a_1 h_2)^2 y^2=[a_1(h+h_1)-a_3 h_1]^2(a_2^2+h_2^2) \tag{δ}$$

将(δ)式的结果，代入(α)式，得

$$(a_2 h_1-a_1 h_2)^2 x^2=h_2^2[a_1(h+h_1)-a_3 h_1]^2 \tag{ε}$$

或

$$x=\frac{h_2[a_1(h+h_1)-a_3h_1]}{a_2h_1-a_1h_2} \qquad (\varepsilon')$$

【注】 秦氏本问致误的原因,是以

$$\frac{a}{x+h}=\frac{a_1}{h_1} \qquad (\zeta)$$

代替了(β)式. 解(α),(ζ),(γ)三式,得

$$y^2=\frac{a_1^2h^2(a_2^2+h_2^2)}{(a_2h_1-a_1h_2)^2}$$

$$=\frac{h\ (a_1hh_2)^2[(a_1ha_2)^2+(a_1hh_2)^2]}{[(a_2h_1)h(a_1ha_2)-(a_1ha_2)(a_1hh_2)]^2} \qquad (\eta)$$

$$x^2=\frac{h_2^2y^2}{a_2^2+h_2^2}$$

$$=\frac{h_2^2h\ (a_1hh_2)\ [(a_1ha_2)^2+(a_1hh_2)^2]}{(a_2^2+h_2^2)[(a_2h_1)h(a_1ha_2)-(a_1ha_2)(a_1hh_2)]^2} \qquad (\theta)$$

【原草】 草曰:以台高 30 尺,并目高 5 尺,得 35 尺,以乘出竿 4 尺 1 寸 5 分,得 145 尺 2 寸 5 分,为上. 以目高 5 尺,乘脚阔 2 尺,得 10 尺,减上 145 尺 2 寸 5 分,余 135 尺 2 寸 5 分,自之,得 18292 尺 56 寸 25 分,为段. 次以去址幂 144 尺,并岸高幂 25 尺,得 169 尺,乘段 18292 尺 56 寸 25 分,得 3091443 尺 625 寸,为峻实(原为"以出竿 4 尺 1 寸 5 分,乘台高 30 尺,得 124 尺 5 寸,为段. 以去址 12 尺乘段,得 1494 尺,为阔泛. 以获岸高 5 尺,乘段 124 尺 5 寸,得 622 尺 5 寸,为浅泛. 以目高 5 尺,乘去址 12 尺,得 60 尺,为约泛. 以阔泛浅泛约泛三者求等,得 1 尺 5 寸,皆以约之. 其阔泛得 996 尺,为阔率. 其浅泛得 415 尺,为浅率. 其约泛得 40 尺,为约率. 以阔率 996 自乘,得 992016 尺,为阔幂. 以浅率 415 自乘,得 172225 尺,为浅幂. 并阔浅二幂,得 1164241,为峻幂. 以阔幂 992016,乘峻幂,得 1154945699856 尺于上. 又以台高 30 尺自乘,得 900,为台高幂. 乘上,得 1039451129870400 尺,

为峻实.”). 次以去址1丈2尺,乘目高5尺,得60尺. 为寄. 以出竿4尺1寸5分,乘岸高5尺,得20尺7寸5分,减寄60尺,余39尺2寸5分,自之,得1540尺56寸25分,为峻隅(原为“次以阔率996乘浅率415,得413340,为寄. 以台高30,乘阔率996,得29880,又乘约率40,得1195200,内减寄,余781860尺,自乘,得611305059600尺为隅.”). 以隅与峻实求等,得6寸25分(原为“24800400”.),俱以约之,得49463089尺(原为“41912676尺.”),为峻定实. 得24649,为峻定隅. 开同体连枝平方,得峻岸至水际斜长. 验同体格,乃以定隅24649为实,先以1为隅,开平方,得157,为同体法。 次以峻定实49463089尺(原为“41912676尺.”)为实,亦以1为隅,开平方,得7033尺(原为“6474尺.”),为同体实. 实如同体法157而一,得44(原为“41”)尺,不尽125(原为“37”.),与法157求等,得1,俱以1各约之,其法与余,只得此数,乃直命之得4丈4尺157分尺之125(原为“4丈1尺157分尺之37”.),为涸岸斜长至水际. 求退水深,置岸高5尺,自乘,得25,为岸高幂. 乘段18292尺56寸25分,得457314尺625寸,为深泛(原为“置岸高5尺,自乘,得25,为岸高幂. 乘峻定实41912676尺,得1047816900,为深泛.”). 以峻隅1540尺56寸25分,为隅泛(原为“以去岸12尺,自乘,得144尺,为去岸幂. 并岸高幂25,得169,以乘峻定隅24649,得4165681,为隅泛.”). 置二泛求等,得6寸25分(原为“169”),俱约二泛,得7317025尺(原为“6200100”.),为定实. 得24649,为深定隅. 开连枝平方,得水退立深. 验同体格,乃以深定隅24649为实,先以1为隅,开平方,得157,为同体法. 次以深定实7317025(原为“6200100”.)为实,亦以1为隅,开平方,得2705尺(原为“2490”.),为同体实. 实如法157而一,得17尺(原为“15尺”),不尽36(原为“135”),与法求等,得1,俱以1各约之,法余只得此数,乃直命之得1丈7尺157分尺之36(原为“1丈5尺157分尺之135”.),为水退立深.

壹高𝍫〇尺 上
目高𝍣尺 中
得𝍫𝍣尺 下
以上并中，得下。

出竿ㄨ𝍩𝍣尺
得上𝍠ㄨ𝍧𝍪𝍣尺
目高𝍣尺
以上乘前下，得中，为上。得

脚阔𝍡尺
得𝍩〇尺
减上𝍠ㄨ𝍧𝍪𝍧尺
以上乘前下，得中，以中减下，得后上。得

余𝍠𝍬𝍨𝍪𝍧尺
余𝍠𝍬𝍨𝍪𝍦尺
段𝍠𝍯𝍡𝍰𝍡𝍱𝍥𝍪𝍤尺
以上乘中，得下为段。

去址𝍩𝍡尺 上
去址𝍩𝍡尺 中
去址幂𝍠ㄨㄨ尺 下
以上乘中，得下。

岸高𝍤尺
岸高𝍤尺
岸高幂𝍪𝍤尺
以上乘中，得下。

去址幂𝍠ㄨㄨ尺
得𝍠𝍮𝍨尺
段𝍠𝍯𝍡𝍰𝍡𝍱𝍥𝍪𝍤尺
以上并前下，得中，以中乘下，得后上。得

峻实𝍢〇𝍧𝍩ㄨㄨ𝍢〇𝍥𝍪𝍧尺
去址𝍩𝍡尺
目高𝍣尺
以中乘下，得后上。

寄	得	余
[算筹数]尺　上	[算筹数]尺	[算筹数]尺
出竿[算筹数]尺　中	减寄[算筹数]尺	峻隅[算筹数]尺
岸高[算筹数]尺	余[算筹数]尺	峻实[算筹数]尺
以中乘下，得后上	以上减中，得下	以上乘前下，得中，以中与下求等，得后上

等数[算筹数]寸	上　副　次　下	
峻定实[算筹数]尺	得商[算筹数]为实	得商[算筹数]为峻法
峻定隅[算筹数]	[算筹数]以峻定实为实	[算筹数]以峻定隅为实
	〇方	〇方
	一平隅	一平隅
以等约之，得二定，格隅实各同体，以一为隅，开平方	以隅开实，得上数，仍为实	以隅开实，得上数，仍以法除实，同体为得

上 商○	骑长××尺	岸高[illegible]尺	上 段[illegible]尺
中 同体实[illegible]	子 [illegible]	岸高[illegible]尺	中 深泛[illegible]尺
下 同体法[illegible]	母 [illegible]	岸高幂[illegible]尺	下 隅泛[illegible]尺
以下除中，得上	不尽为子，法为母	以上乘中，得下	以上乘前下，得深泛，以峻隅为隅泛，以中下求等，得后上

等数[illegible]寸	上 商[illegible]尺为实	商[illegible]为法
深定实[illegible]尺	副 深定实[illegible]尺	深定隅[illegible]
深定隅[illegible]	次 方○	方○
	下 [illegible]隅	[illegible]隅
以等约之，得二定同体格，隅实各以一为隅，开平方	开实，得商，仍为实	开隅得商，为法。

商〇 上 中 270 隅同体实 下 157 同体法 以法除实，得后上	商 17 尺 36 不尽 157 法 不尽与法求等	商 17 尺 36　1 等 157　1 等 等约不尽，为子数，等约法为母	水退立深 17 尺 子 36 母 157

【新释】 已知：$h_1=5$ 尺，$h_4=5$ 尺，$h=3$ 丈，$a_1=4.15$ 尺，$a_2=12$ 尺，$a_3=2$ 尺，代入(δ)式，得

$$1540.5625y^2=3091443.0625$$

或 $$24649y^2=49463089.$$

解之，其草式如下：

(1). 同体法：

1	+0	−24649	
	100	+10000	100
1	+100	−14649	
	100		
1	+200	−14649	
	50	+12500	50
1	+250	−2149	
	50		
1	+300	−2149	
	7	+2149	7
1	+307	+0	

$$\therefore \quad 同体法=157.$$

(2). 同体实:

1	$+\ 0$	-49463089	
	7000	$+49000000$	7000
1	$+\ 7000$	$-\ 463089$	
	7000		
1	$+14000$	$-\ 463089$	
	30	$+\ 420900$	30
1	$+14030$	$-\ 42189$	
	30		
1	$+14060$	$-\ 42189$	
	3	$+\ 42189$	3
1	$+14063$	$+\ 0$	

$$\therefore \quad 同体实=7033.$$

因得:　　$y=\dfrac{7033}{157}=44\dfrac{125}{157}$ 尺.

由(ε)法,得

$$1540.5625x^2=457314.0625$$

或　　$$24649x^2=7317025.$$

解之,其草式如下:

(1) 同体法:

$$\sqrt{24649}=157.$$

(2) 同体实:

1	+0	−7317025	
	2000	+4000000	2000
1	+2000	−3317025	
	2000		
1	+4000	−3317025	
	700	+3290000	700
1	+4700	− 27025	
	700		
1	+5400	− 27025	
	5	+ 27025	5
1	+5405	+ 0	

$\therefore$ 同体实$=2705$.

因得：
$$x=\frac{2705}{157}=17\frac{36}{157}\text{尺}.$$

30. 陡岸测水

问行师遇水，须计篾缆，搭造浮桥。今垂绳量陡岸，高三丈，人立其上，欲测水面之阔，以六尺竿为矩，平持去目下五寸，令矩本抵颐，遥望水彼岸，与矩端参相合。又望水此岸沙际，入矩端三尺四寸。人目高五尺，其水面阔几何？

答曰：水阔二十三丈八尺(原答：二十三丈四尺六寸.)。

术曰：以勾股重差求之。置矩去目下寸，为法。以人目高并岸高(此处原有"减去法，余"四字)，乘入矩端为实。实如法而一，得水阔。

【新释】 设水阔为 x，岸高为 H，人目高为 h，矩入目下为 b，沙际入矩端为 a，则有

$$\frac{x}{a}=\frac{H+h}{b}$$

或

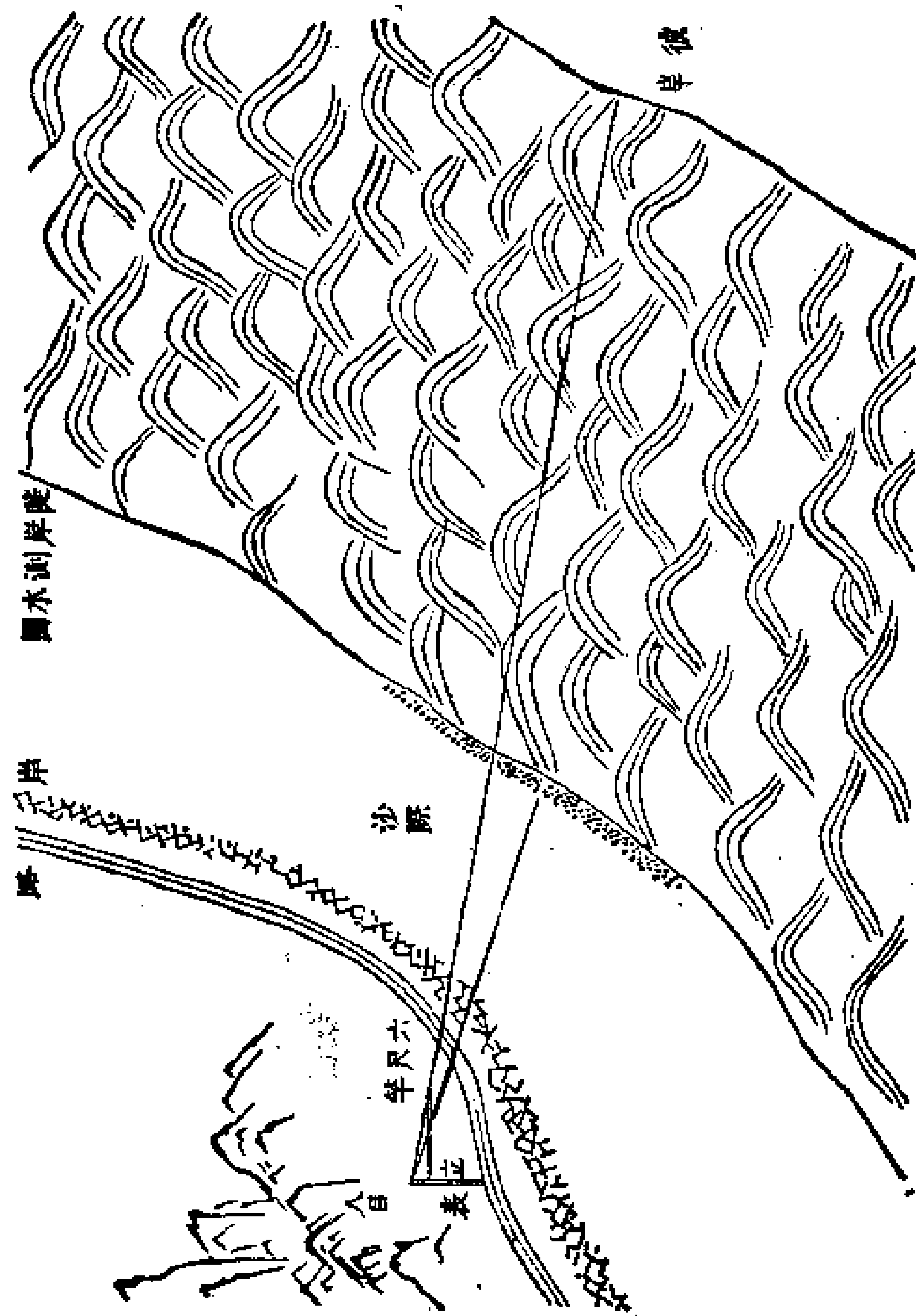


图24 陡岸测水

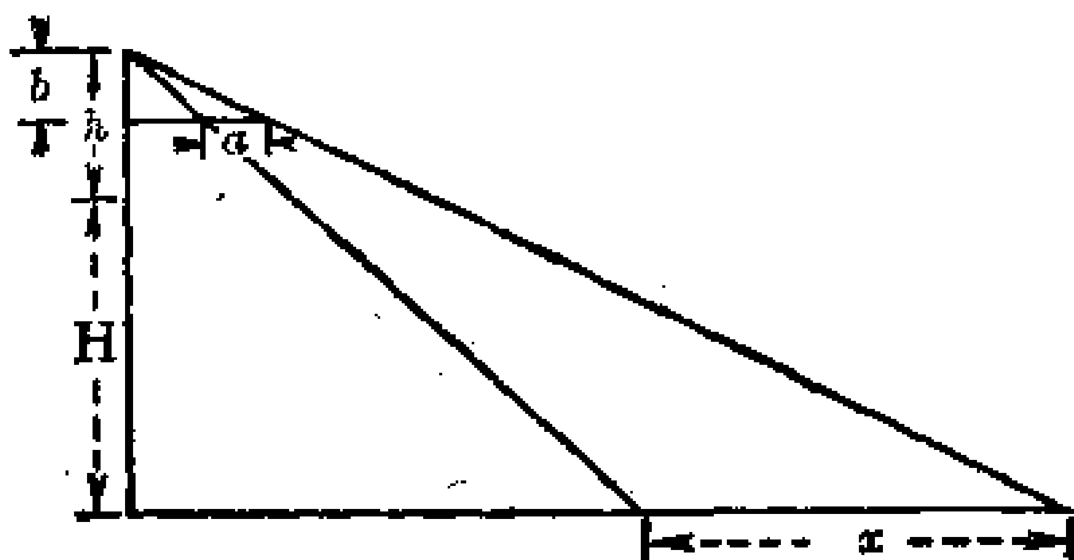


图 25

$$x=\frac{a(H+h)}{b} \qquad (\alpha)$$

【注】 本问秦氏致误的原因，是以

$$\frac{x}{a}=\frac{H+h-b}{b} \qquad (\beta)$$

来求得 x 的.

【原草】 草曰：置矩本去目下5寸，为法．以人目高5尺并岸高3丈，得3丈5尺，通为寸，得350寸（此处原有"减法5寸，余345寸."二语.），乘沙际入矩端34寸，得11900寸（原为"11730寸."），为实．实如法5寸而一，得2380寸（原为"2346寸."），展为23丈8尺（原为"23丈4尺6寸."），为水阔．合问.

【新释】 已知：$H=3$丈，$h=5$尺，$a=34$寸，$b=5$寸．代入(α)式，得

$$x=\frac{34\times(300+50)}{5}=\frac{11900}{5}$$
$$=2380\text{寸}=23\text{丈}8\text{尺}.$$

第八卷 凡 六 问

31. 表望方城

问敌城不知广远．傍城南山原林间望之，林际有木二株，南北

相去一百六十步，遥与城东方面参相直．于二木之东，相对立表，表间与木四方平．人目以绳维之，人自东表后，向西行一十步，望城东北隅，入东前表一十五步．又望城东南隅，入东前表四十八步强半步，里法三百六十步．欲知其方广及相去几何？

答曰：城方广各一十一里二百二十步三十一分步之二十(原答：城方广各一十二里三百二十步.)．

城去木一里九十九步三十一分步之一十一(原答：城去木九里三百二十步.)．

见图 26：

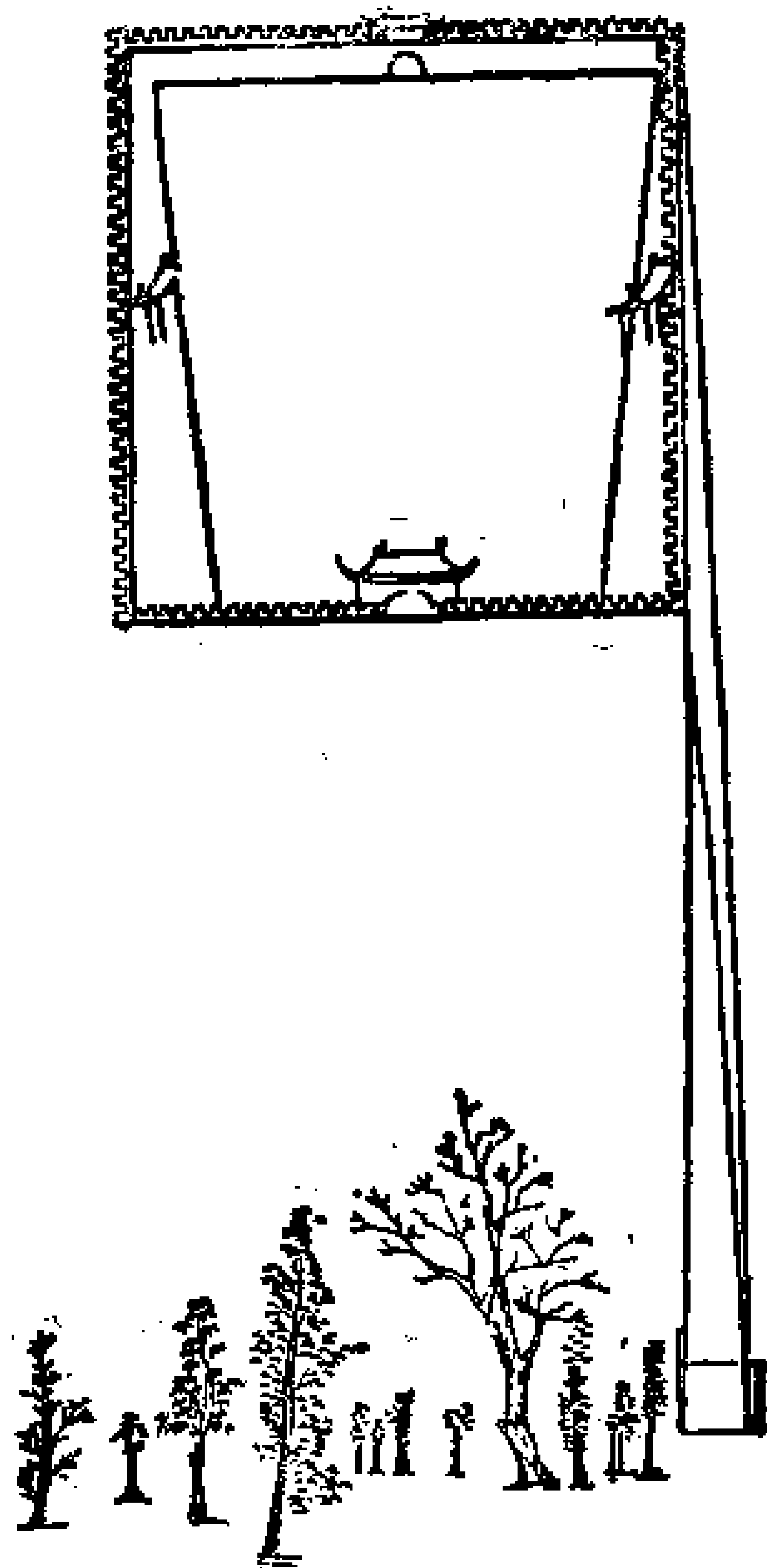


图 26　表望方城

术曰：以勾股重差求之．置城东南隅景入表，减表间，余乘表间，为城去木实．以西行步减城东南(原为"东北")隅景入表，余为法，得城去木数．以城东北隅景入表，减表间，余乘表间，为实(原为"为广实")．以西行步减城东北隅景入表，余为法(原无上述二语．)．实如(此处原有一"前"字．)法而一，减城去木数(原无"减城去木数"一语．)，得城广数．

【新释】　如图 27 所示，设城方广为 x，城去木为 y，表间为 h，

西行步为 d，东北隅景入表为 a，东南隅景入表为 b，由相似三角形关系，得：

$$\frac{y}{h}=\frac{h-b}{b-d}$$

即

$$y=\frac{h(h-b)}{b-d} \qquad (\alpha)$$

又

$$\frac{x+y}{h}=\frac{h-a}{a-d}$$

即

$$x=\frac{h(h-a)}{a-d}-y \qquad (\beta)$$

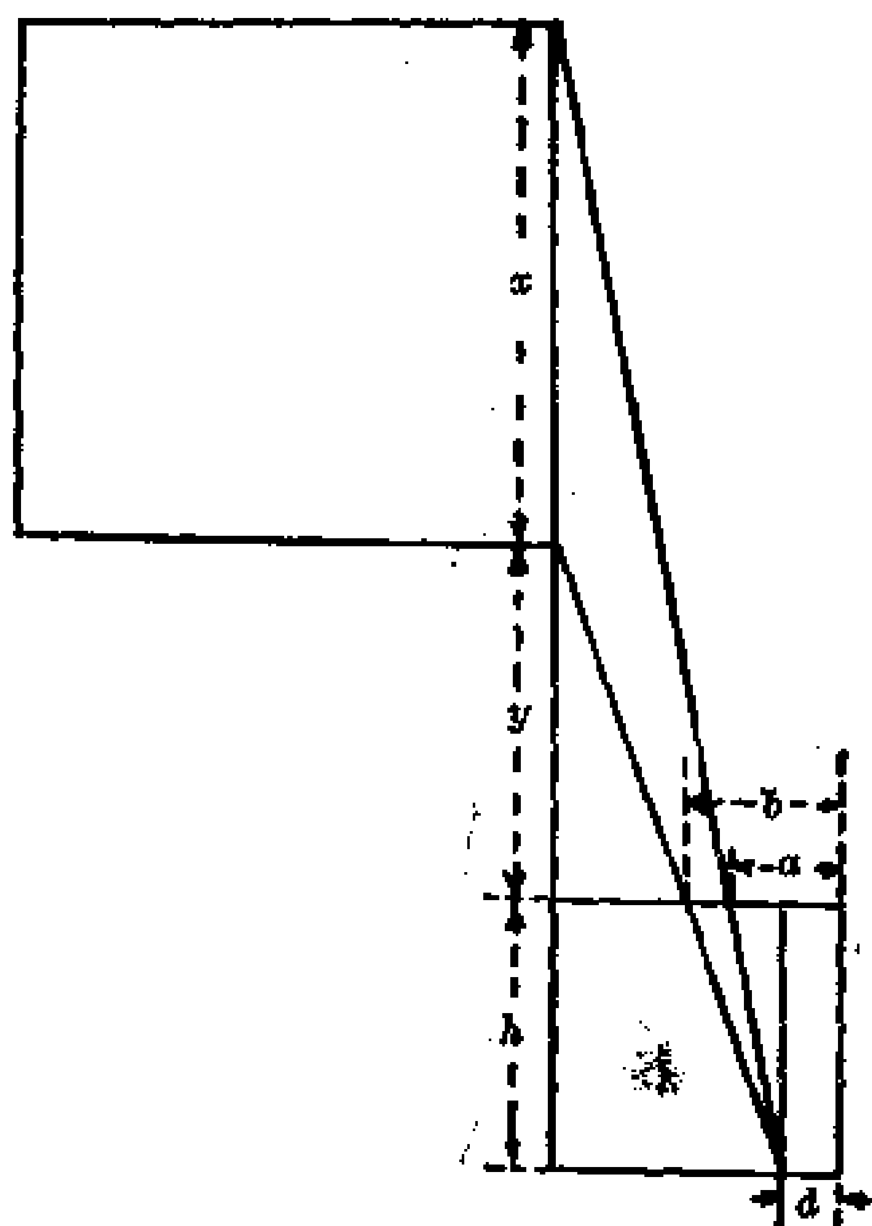


图　27

【注 1】　秦氏本题致误的原因，是以

$$y=\frac{h(h-b)}{a-d} \qquad (\alpha')$$

和

$$x=\frac{h(h-a)}{a-d} \qquad (\beta')$$

来求得 x 和 y 的.

【注 2】　宋景昌改正术草，城去木部分与(α)式相同. 城方广部分，术稍有不同而得数仍无异.

【原草】　草曰. 以西行 10 步，减东南(原为"东北")隅入表 48 步 7 分半(原为"15 步")，余 38 步 7 分半(原为"5 步")，为法. 以城东南隅景入表 48 步 7 分半，减表间 160 步，余 111 步 2 分半，乘表间 160 步，得 17800，为城

去木实．以法38步7分半(原为"5步")除之，得459步31分步之11(原为"3560步．")．以里法360约之，得1里99步31分步之11(原为"9里320步．")，为城去北株木里及步数．次置城东北隅景入表15步，减表间160，余145步，乘表间160，得23200，为实(原为"北城广实．")．以西行10步，减东北隅景入表15步，余5步为法(原为"以前法5步．")除之，得4640步．以里法360约之，为12里320步，以减城去木1里99步31分步之11，余11里220步31分步之20，为城方广里数及步数(原无"以减城去木1里99步31分步之11，…．为城方广里数及步数．"三语．原为"即城方广里数及步数")，合问．

【新释】 已知：$h=160$ 步，$b=48.75$ 步，$d=10$ 步，代入(α)式，得

$$y=\frac{160\times(160-48.75)}{48.75-10}=459\frac{11}{31}\text{步}$$

$$=1\text{里}99\frac{11}{31}\text{步}.$$

又知：$a=15$ 步，由(β)式，得

$$x=\frac{160\times(160-15)}{15-10}-459\frac{11}{31}=4640-459\frac{11}{31}$$

$$=4180\frac{20}{31}=11\text{里}220\frac{20}{31}\text{步}.$$

32．遥度圆城

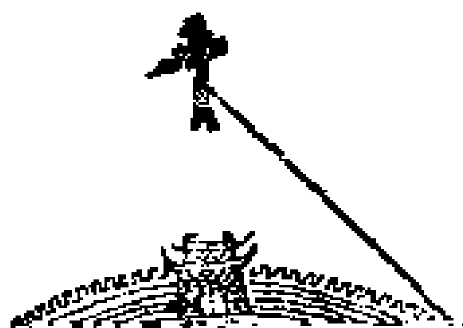
问有圆城不知周径，四门中开，北外三里有乔木，出南门便折东行九里，乃见木．欲知城周径各几何？圆用古法．

答曰：径九里，周二十七里．

术曰：以勾股差率求之．一为从隅，伍因北外里，为从七廉．置北里幂，八因，为从五廉．以北里幂为正率，以东行幂为负率，二率差，四因，乘北里，为益三廉．倍负率．乘五廉，为益上廉．以北里乘

上廉，为实．开玲珑九乘方，得数，自乘，为径．以三因径，得周．

遥度圆城，图 28 具于后：



得数	288	负率	81	益上廉	11664
北里	3	倍数	2	北里	3
益三廉	864	得数	162	实	34992
	〇	从立廉	72		〇
以上乘副，得次		以上乘副，得以次下，以上乘得后次		以上乘副，得次实	

已上系求率图，以后系开方图

正商	〇	商	3	商	3
负实	34992里		34992		34992
虚方	〇		〇		〇
负上廉	11664		11664		11664
虚次廉	〇		〇		〇
负才廉	864		864		864
虚维廉	〇		〇		〇
正行廉	72		72		72
虚爻廉	〇		〇		〇
正星廉	15		15	星廉	24
虚下廉	〇	下廉	3	下廉	3
正隅	1	隅	1	隅	1
约实，商三里。		以商生隅，得下廉；以商生下廉，得星廉；以		以商生星廉，得爻廉。	

商

交廉

以商生交廉，入行廉。

商

行廉

以商生行廉，得维廉。

商

维廉

以商生维廉，得才廉。

商

实

方

上廉

次廉

益才廉

从才泛

维廉

行

交

星

下

隅

以益才廉，消从才廉，余是从才廉。

从才廉

以商生才廉，得次廉。

次廉

以商生次廉，得从上廉。

𝍢 里	𝍢	𝍢
实　‖≡Ⅲ≐‖ 里	‖≡Ⅲ≐‖	‖≡Ⅲ≐‖
从方　丨一丅⊥𝍣	○	○
≡Ⅲ≐Ⅲ	从上廉　≡Ⅲ≐Ⅲ	益上廉　丨一丅⊥𝍣
		从上廉　丨≡Ⅲ≡‖
▤丨≐✕	▤丨≐✕	▤丨≐✕
一Ⅱ=Ⅲ	一Ⅱ=Ⅲ	一Ⅱ=Ⅲ
Ⅲ⊥✕	Ⅲ⊥✕	Ⅲ⊥✕
≐Ⅲ	丨≐Ⅲ	‖≐Ⅲ
≛‖	≛‖	≛‖
=✕	=✕	=✕
𝍢	𝍢	𝍢
丨	〤	丨
乃以从方，命上商，以除实，适尽。得三里。	以商生从上廉，得从方。	以益上廉，消从上廉，余是从上廉。

【新释】　如图 29，设城径为 x^2，北外里为 a，东行里为 b，$B\text{几}$ 为 c，则因

$$\triangle AB\text{几} \backsim \triangle BOT,$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{x^2}{2}+a}{BT}=\frac{c}{x^2+a} \qquad (\alpha)$$

$$\because \quad \frac{x^2+a}{BT}=\frac{BT}{a},$$

$$\therefore \quad BT=\sqrt{a(x^2+a)} \qquad (\beta)$$

又因
$$\frac{c}{b}=\frac{x^2/2+a}{x^2/2},$$

$$\therefore \quad c=\frac{b(x^2+2a)}{x^2} \qquad (\gamma)$$

把(β)，(γ)代入(α)式，得

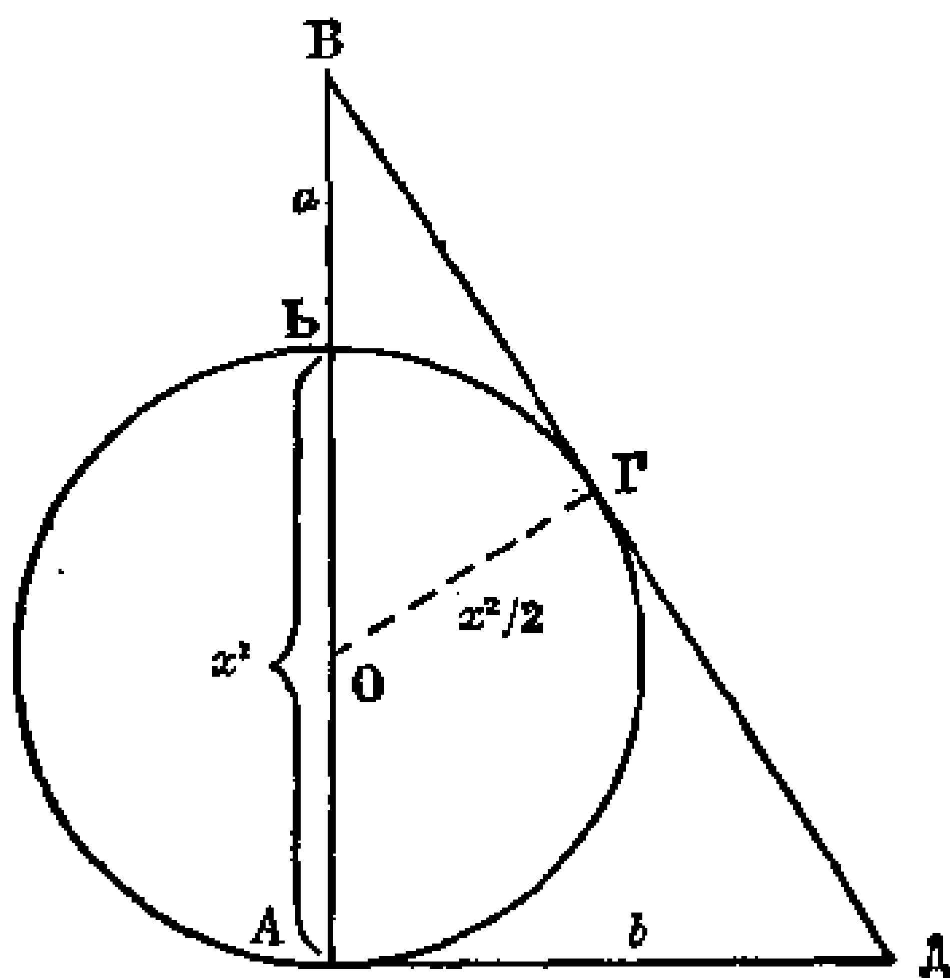


图　29

$$\frac{x^2+2a}{2\sqrt{a(x^2+a)}}=\frac{b(x^2+2a)}{x(x^2+a)} \tag{δ}$$

两端平方，得

$$\frac{(x^2+2a)^2}{4a(x^2+a)}=\frac{b^2(x^2+2a)^2}{x^4(x^2+a)^2}.$$

约去分母上的公因式(x^2+a)，得

$$x^4(x^2+a)(x^2+2a)^2=4ab^2(x^2+2a)^2.$$

合并同类项化简，得

$$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)x^4-2b^2\cdot 8a^2x^2-a\cdot 2b^2\cdot 8a^2=0 \tag{ε}$$

(ε)式便是城径的方程式．x求出后，则

$$城径=x^2 \tag{ζ}$$

$$城周=3x^2 \tag{η}$$

(η)式中，取 $\pi=3$．

【注1】　秦氏此题解法，殊甚迂回，盖伊特为立一10次方程

式而若斯欤?我们可以参照《测圆海镜》卷三第四问的精神,给出本问的最简解法如下:设城径为 x,如上图,则有

$$\frac{b}{x/2}=\frac{x+a}{B\Gamma}=\frac{x+a}{\sqrt{a(x+a)}}.$$

两端平方,化简,得

$$x^3+ax^2-4ab^2=0.$$

【注 2】 沈钦裴氏曾用天元术给出(s)式,惟系硬凑为九乘方者.宋景昌氏已予指出之.

【原草】 草曰:以 1 为从隅,以 5 因北 3 里,得 15 里,为从七廉.以北 3 里自乘,得 9 里,为正率,以 8 因率,得 72,为从五廉.以东行 9 里自乘,得 81,为负率.以正率 9,减负率,余 72,为负差.以 4 因之,得 288,以乘北 3 里,得 864,系负差所乘者,为益三廉.倍负率 81,得 162,乘五廉 72,得 11664,为益上廉.以北 3 里乘上廉,得 34992,为实.各置实廉隅,玲珑空耦位方廉,以约实,众法不可超进,乃于实上定商 3 里,其隅与商相生,得 3,为从下廉.又与商相生,入从七廉,共得 24,为星廉.又与商相生,得 72,为从六廉.又与商相生,入五廉内,共得 288.又与商相生,得 864,为从四廉.又与商相生,得 2592,为正三廉.内消益三廉 864 讫,余 1728,为从三廉.又与商相生,得 5184,为从二廉.又与商相生,得 15552,为正上廉.内消益上廉 11664 讫,余 3888,为从上廉.又与商相生,得 11664,为从方.乃命上商 3 里,除实,适尽.所得 3 里,以自乘之,得 9 里,为城圆径之里数.又以古法圆率 3 因之,得 27,为城周.

【新释】 已知:$a=3$ 里,$b=9$ 里,代入(s)式,得

$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x-34992=0.$$

$$\begin{array}{l|l}
1+0+15+0+72+0-864+0-11664+0-34992 & \\
\quad 3+9+72+216+864+2592+5184+15552+11664+34992 & 3 \\
\hline
1+3+24+72+288+864+1728+5184+3888+11664+\quad 0 &
\end{array}$$

因得 $x=3$. 代入(ζ), (η)二式, 得

$$城径=x^2=9\text{ 里},$$

$$城周=3x^2=27\text{ 里}.$$

33. 望 敌 圆 营

问敌临河为圆营,不知大小. 自河南岸至某地七里,于其地立两表,相去二步,其西表与敌营南北相直. 人退西表一十二步,遥望东表,适与敌营圆边参合. 圆法用密率, 里法三百六十步, 欲知其营周及径各几何?

答曰: 营周六里八十七步三万五千九百一十七分步之二千三百三十七(原答: 六里一百二步七分步之六.).

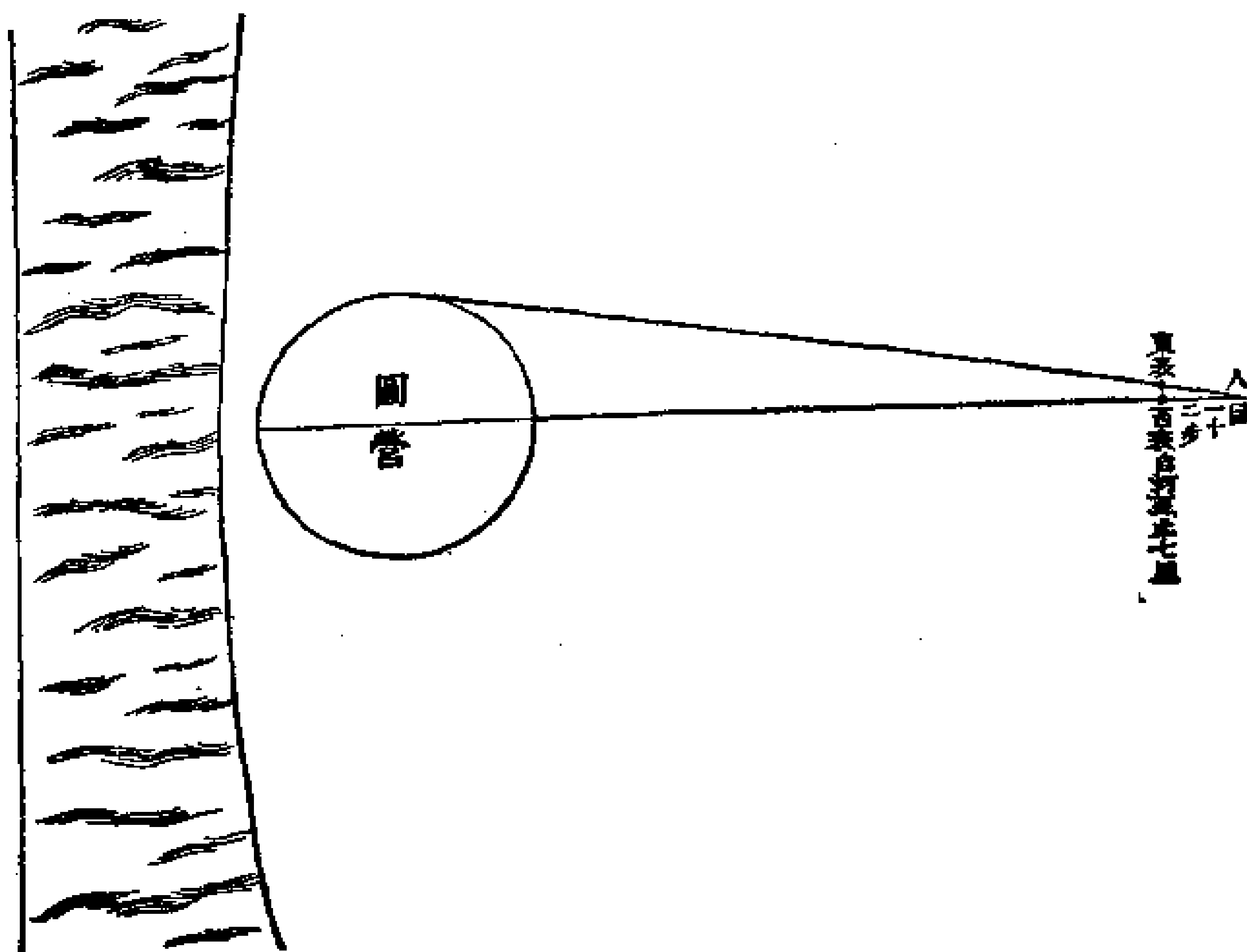


图 30　望敌圆营

径一里三百五十四步五千一百三十一分步之五千四(原答：二里.).

表间　表间　句幂步　退表　退表　股幂步	昃数　昃法步　率步　退表　率　率	率幂　句幂　泛实　率幂乘句幂，得泛实，

率　句幂　泛从方　以率乘句幂，得泛从方	股幂　约法　泛隅　以四约股幂，得泛隅	泛实　泛从方　泛隅　等数　置三泛，求等，得四，以等约泛，得定．

商 〇	商 〇〇	商 𝍦〇〇
实 丅〤丨一〇〓〤	实 丅〤丨一〇〓〤	实 丅〤丨一〇〓〤
方 〓𝍤≡𝍡	方 𝍡𝍤𝍢〓	方 〓𝍤≡𝍡
隅 𝍧	隅 𝍧	隅 𝍧
方一进，隅再进。	同前各进。	约实，置商七百步，生隅入方。

商 𝍦〇〇	商 𝍦〇〇	商 𝍦〇〇
实 丅〤丨一〇〓〤	余实 〓𝍡𝍭丅〓𝍡〤	实 〓𝍡𝍭丅〓〤
方 𝍭𝍦≡𝍡	方 𝍭𝍦≡𝍡	方 丨𝍤丨≡𝍡
隅 𝍧	隅 𝍧	隅 𝍧
以商命方，除实。	复以商生隅，入方。	方一退，隅再退，置续商一十步。

商　实　方　隅

以续商生隅，入方。

商　实　方　隅

以续商命方，除实。

商　实　方　隅

以续商生隅，入方。

商　实　方　隅

方一退，隅再退，续置商四步。

商　实　方　隅

以商生隅，入方。

商　实　方　隅

以商命方，除实。

商	商	商
实	实余	子
方	方	母
隅	隅	等数
以商生隅，入方.	并方隅为母，实余为子.	母子求等，得三，俱以约之.

营径 步	营径一里 步
子	子
母	母
里法 步	

术曰：以勾股夕桀求之．置表间，自乘，为勾幂．以退表自乘，为股幂（原有“并二幂为弦幂”一语．）．置里通步，并退表，为率（原无“并退表，为率．”二语．）自之，乘句幂（此处原有“为率，自乘”．四字．），为泛实，以句幂乘率，为泛从方（上二语原为“半弦幂乘率，为泛从上廉．”），以四约股幂，为泛隅（上二语原为“以句幂减股幂，余四约之，自乘，为泛益隅．”）．三泛可约，约之，为定开连枝平方（原为“开连枝三乘玲珑方．”），得营径．以密率二十二乘七除，为周．

【新释】 如图 31，设营径为 x，河南岸至某地的距离：$\Gamma E=d$，表间：$БE=a$，退表：$AE=b$．由比例关系，可得

$$\frac{AB}{x/2}=\frac{b}{a}$$

或

$$\frac{(d+b)(d+b-x)}{(x/2)^2}=b^2/a^2.$$

化简，得

$$\frac{b^2}{4}x^2+a^2(d+b)x-a^2(d+b)^2=0 \qquad (\alpha)$$

x 求出后，取 $\pi=\frac{22}{7}$，则有

$$营周=\frac{22}{7}x \qquad (\beta)$$

【注 1】 秦氏本问致误的原因，是由

$$\frac{OE}{OB}=\frac{b}{a} \qquad (\gamma)$$

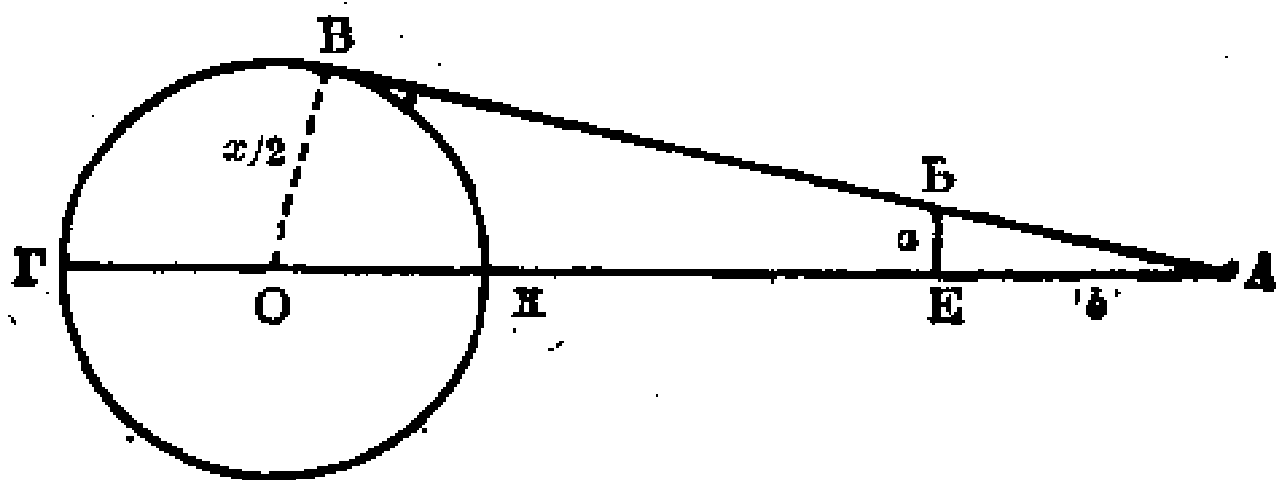


图 31

导出了

$$-\left(\frac{b^2-a^2}{4}\right)^2x^4+\frac{a^2+b^2}{2}\cdot a^2d^2x^2-(a^2d^2)^2=0 \qquad (\delta)$$

【注 2】 宋景昌改正术数，与(α)式相同.

【原草】 草曰：置表间 2 步，自乘，得 4，为句幂. 以退表 12 步，自乘，得 144，为股幂(此处原有“以勾股二幂并之，得 148，为弦幂.”诸语.). 置 7 里，以里法 360 步通之，得 2520 步，并退表 12 步，得 2532 步. 为率(原无“并退表…. 为率.”). 自乘，得 6411024(原为“得 6350400.”)，乘句幂 4，得 25644096(原为.“得 25401600，为率. 以率自乘，得 64524128256 万.”)，为泛实. 以勾幂 4，乘率 2532，得 10128，为泛从方(此段原为“乃半弦幂，得 74，乘率 25401600，得 1879718400，为泛从上廉.”). 置股幂 144，以 4 约之，得 36，为泛隅(此段原为“以勾幂 4，减股幂 144，余 140. 以 4 约之，得 35，以自乘，得 1225，为泛益隅”.). 置三泛，求等，得 4(原为“得 1225.”)，俱以约之，得 6411024，为定实，2532 为从方，9 为定隅(原为“得 526727577600. 为定实，1534464 为从上廉，1 为定益隅”.). 开连枝平方，乃以方隅进超二度，约商，置 700 步，以商生隅，得 63 万，入方，得 883200，为从方. 乃命上商除实，实余 228624，又以商生隅，入方，得 1513200. 诸法皆退，方一退，为 151320. 隅再退，为 900. 乃于上商之次，续商. 置 10 步，以续商生隅，入方，得 152220，乃命续商除实. 实余 76404. 又以续商生隅，入方，得 153120. 诸法又退，方一退，为 15312，隅再退，为 9，乃于续商之次，置商 4 步，以商生隅，入方，得 15348，乃命上商除实，实余 15012，又以商生隅，入方，得 15384，并方隅，共得 15393，为母. 以实余 15012，为子. 母子求等，得 3，俱以约之，得 714 步 5131 分步之 5004，以里法约之，得 1 里 354 步 5131 分步之 5004，为营径(此段原为“开玲珑三乘方，乃以廉隅超二度，约商. 置 700，上廉约 153 亿，益隅为 1 亿. 乃以上商生隅，得 7 亿，为益下廉. 又以上商生益

廉，减从廉，余1044464万，又以上商生从廉，得7311248万，为从方。乃命上商除实，实余14940217600，又以上商生益隅，入下廉，得14亿。又以上商生益廉，减从廉，余64464万，又以上商生从廉，入方，得7762496万。又以上商生益隅，入下廉，得21亿，又以上商生益廉，减从廉。余1405536万，为益上廉。又以上商生益隅，入下廉，得28亿。诸法皆退，方一退，为7762496000。益上廉再退，为140553600。益下廉三退，为280万。益隅四退，为1万。乃于上商之次，续商，置20步，以续商生隅，入下廉，为282万。又以续商生下廉，入上廉，为146193600。又以续商生上廉，减从方，余7470108800。乃命续商除实，适尽。所得720步，以里法约之，得2里，为营径.”）。次以密率22，乘营径步数（原为“乘720，得15840.”），为实。以7除之，得2247步35917分步之2337，以里法约之，得6里87步35917分步之2337（原为“得2262步7分步之6，以里法约得6里102步7分步之6.”），为营周。

【新释】 已知：$a=2$ 步，$b=12$ 步，$d=7$ 里$=2520$ 步。代入(α)式，得

$$9x^2+2532x-6411024=0.$$

9	+2532	−6411024	
	6300	+6182400	700
9	+8832	−228624	
	6300		
9	+15132	−228624	
	90	+152220	10
9	+15222	−76404	
	90		
9	+15312	−76404	
	36	+61392	4
9	+15348	−15012	
	36		
9	+15384	−15012	

$$\therefore\quad x=714\frac{15012}{9+15384}=714\frac{5004}{5131}$$

$$=1\text{ 里 }354\frac{5004}{5131}\text{ 步}.$$

由(β)式，得

$$\text{背周}=\frac{22x}{7}=\frac{22\times(714\times5131+5004)}{7\times5131}$$

$$=\frac{22\times3668538}{7\times5131}=\frac{80707836}{35917}=2247\frac{2337}{35917}$$

$$=6\text{ 里 }87\frac{2337}{35917}\text{ 步}.$$

34．望敌远近

问敌军处北山下原，不知相去远近．乃于平地立一表，高四尺，人退表九百步，步法五尺．遥望山原，适与表端参合．人目高四尺八寸．欲知敌军相去几何？

答曰：一十二里半．

图具于后：

术曰：以勾股求之，重差入之．置人目高，以表高减之，余为法．置退表，乘表高，为实，实如法而一．

【新释】 设表去山原为 x，人退表为 d，表高为 h_1，人目高为 h_2，如图 33，由比例关系，得

$$\frac{x}{d}=\frac{h_1}{h_2-h_1}$$

或

$$x=\frac{dh_1}{h_2-h_1}\qquad(\alpha)$$

【原草】 草曰：置人目高 4 尺 8 寸，减表高 4 尺，余 8 寸，为法．置退表 900 步，以步法 50 寸通之，得 45000 寸，乘表高 40 寸，得 180 万寸，为实．如法 8 寸而一，得 225000 寸，以步法 50 寸约

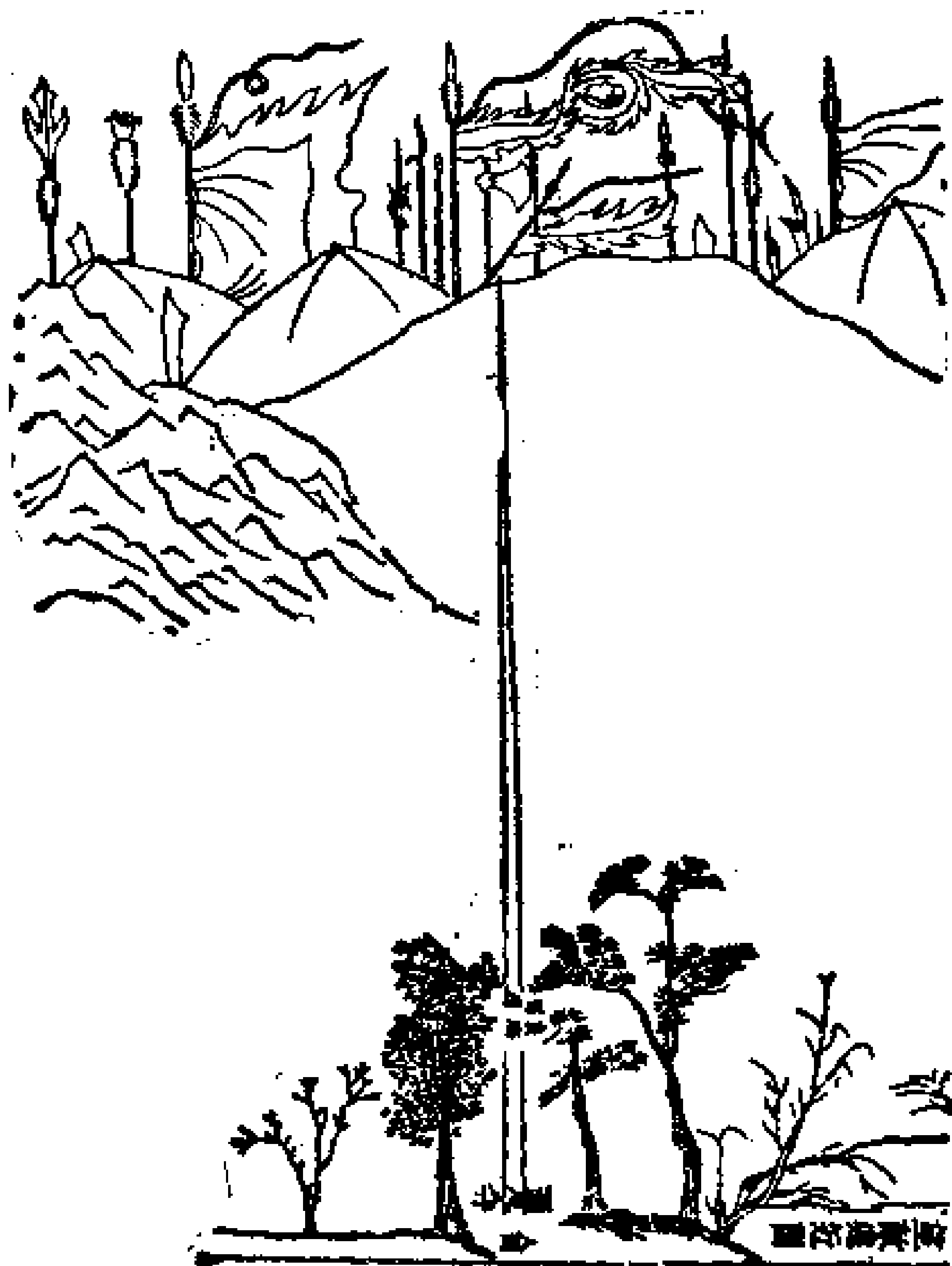


图 32 望敌远近

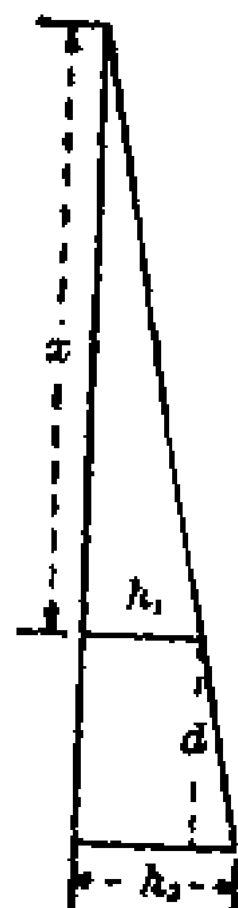


图 33

之，得 4500 步，为相去步．以里法 360 步约之，得 12 里半，为敌去表所．合问．

【新释】：已知：$d=900$ 步$=45000$ 寸，$h_1=40$ 寸，$h_2=48$ 寸．代入(a)式，得

$$x=\frac{45000\times 40}{48-40}=225000\text{ 寸}=4500\text{ 步}=12\frac{1}{2}\text{ 里}.$$

35．古池推元

问有方中圆古池，堙圮止余一角．从外方隅，斜至内圆边七尺

六寸．欲就古迹修之，欲求圆方方斜各几何？

答曰：池圆径，三丈六尺六寸．四百二十九分寸之四百一十二．

方面，三丈六尺六寸．四百二十九分寸之四百一十二．

方斜，五丈一尺八寸．四百二十九分寸之四百一十二．

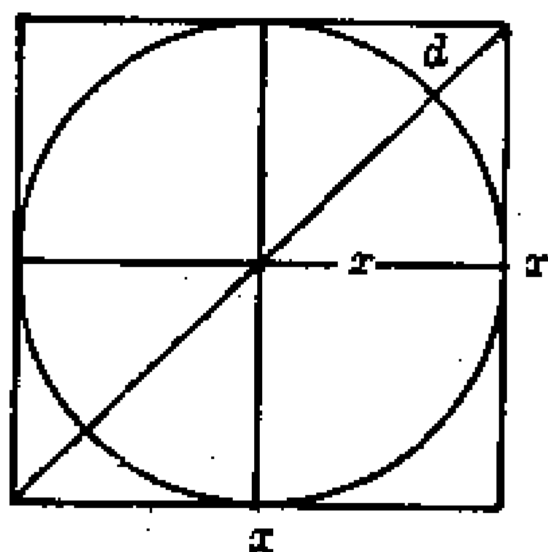


图 34

术曰：以少广求之，投胎术入之．斜自乘，倍之，为实．倍斜为益方，以半为从隅，开投胎平方，得径，又为方面．以隅并之，共为方斜．

【新释】 设池圆径为 x，则方面亦为 x．又设外方隅斜至内圆边之长为 d，则有

$$\sqrt{x^2+x}=x+2d \qquad (\alpha)$$

两端平方，化简，得

$$x^2-4dx-4d^2=0 \qquad (\beta)$$

或

$$\frac{1}{2}x^2-2dx-2d^2=0 \qquad (\gamma)$$

圆径及方面 x 求出后，则

$$方斜=x+2d \qquad (\delta)$$

【原草】 草曰：以斜 76 寸自乘，得 5776，倍之，得 11552 寸，为实．倍斜 76 寸，得 152，为益方．以半寸为从隅，开平方．置实 11552 于上，益方 152 于中，从隅 5 分于下．超步，约得百，乃于实上商置 300 寸，方再进，为 15200，隅四进，为 5000．以商隅相生，得 15000，为正方．以消益方 15200，其益方余 200．次与商相生，得 600，投入实，得 12152．又商隅相生，又得正方 15000，内消负方 200 讫，余 14800，为从方．一退，为 1480．以隅再退，为 50．乃于上商之次，续商置 60 寸．与隅相生，增入正方，得 1780，乃命验续商，除实讫，实余 1472．次以商生隅，增入正方，为 2080．方一

退，为 208. 隅再退，为 5 分. 乃于续商之次，又商置 6 寸，与隅相生，增入正方，为 211. 乃命商，除实讫，实不尽 206 寸，不开，为分子. 乃以商生隅，增入正方，又并隅，共得 214 寸 5 分，为分母. 以分母分子求等，得 5 分为等数，皆以 5 分约其分子分母之数，为 429 分寸之 412，通命之，得池圆径及方面皆 3 丈 6 尺 6 寸 429 分寸之 412. 又倍隅斜 7 尺 6 寸，得 1 丈 5 尺 2 寸，并径 3 丈 6 尺 6 寸，共得 5 丈 1 尺 8 寸 429 分寸之 412，为方斜.

【新释】 已知：$d=76$ 寸，代入(γ)式，得

$$\frac{1}{2}x^2-152x-11552=0$$

或

$$0.5x^2-152x-11552=0.$$

0.5	−152	−11552	
	150	− 600	300
0.5	− 2	−12152	
	150		
0.5	+148	−12152	
	30	+10680	60
0.5	+178	− 1472	
	30		
0.5	+208	− 1472	
	3	+ 1266	6
0.5	+211	− 206	
	3		
0.5	+214	− 206	

因得：

$$x=366\frac{206}{0.5+214}=366\frac{412}{429}\text{ 寸}$$

$$=3\text{ 丈 }6\text{ 尺 }6\frac{412}{429}\text{ 寸}.$$

由(δ)式，得

$$\text{方斜}=x+2d=366\frac{412}{429}+152$$

$$=5\text{丈}1\text{尺}8\frac{412}{429}\text{寸}.$$

36. 表望浮图

问有浮图欹侧，欲换塔心木，不知其高．去塔六丈，有刹竿，亦不知其高．竿木去地九尺二寸始钉锅，锅一十四枚，枚长五寸，每锅下股，相去二尺五寸．就竿为表，人退竿三丈，遥望浮图尖，适与竿端斜合．又望相轮之本，其景入锅第七枚上股．人目去地四尺八寸，心木放三尺为楯卯剪截、欲求塔高轮高，合用塔心木长，各几何？

答曰：塔高，一十一丈七尺．

相轮高，四丈五尺(原答：三丈.)．

塔身高，七丈二尺(原答：八丈七尺.)．

竿高，四丈二尺二寸．

塔心木，七丈五尺(原答：九丈.)．内三尺，为剪截穿凿楯卯。

术曰：以勾股求之，重差入之．置锅数减一，余乘锅相去数，并一枚长数，加竿本，共为表竿高．以退表为法，以人目高减表竿高，余乘竿去塔，为实．实如法而一，得数，加表竿高，共为塔高．置相轮本之锅数，减一，余乘锅相去，为上(原无“为上”二字.)．又人退竿并竿去塔，乘上(原为“又乘竿去塔.”)，为实．实如法而一，得相轮高．以减塔高，余为塔身高．以益楯卯尺数，为塔心木长．

注．宋景昌改正术与此同．

【新释】 设塔高为 H，相轮高为 h，则塔身高为 $H-h$；又设竿高为 h_1，人目高为 h_2，竿去塔为 d_1，退表为 d_2，竿端至景入锅为 h'，锅数为 m，景入锅数为 n，锅长为 a，锅相去为 a_1，竿本为 b，心木放为 b_1，则

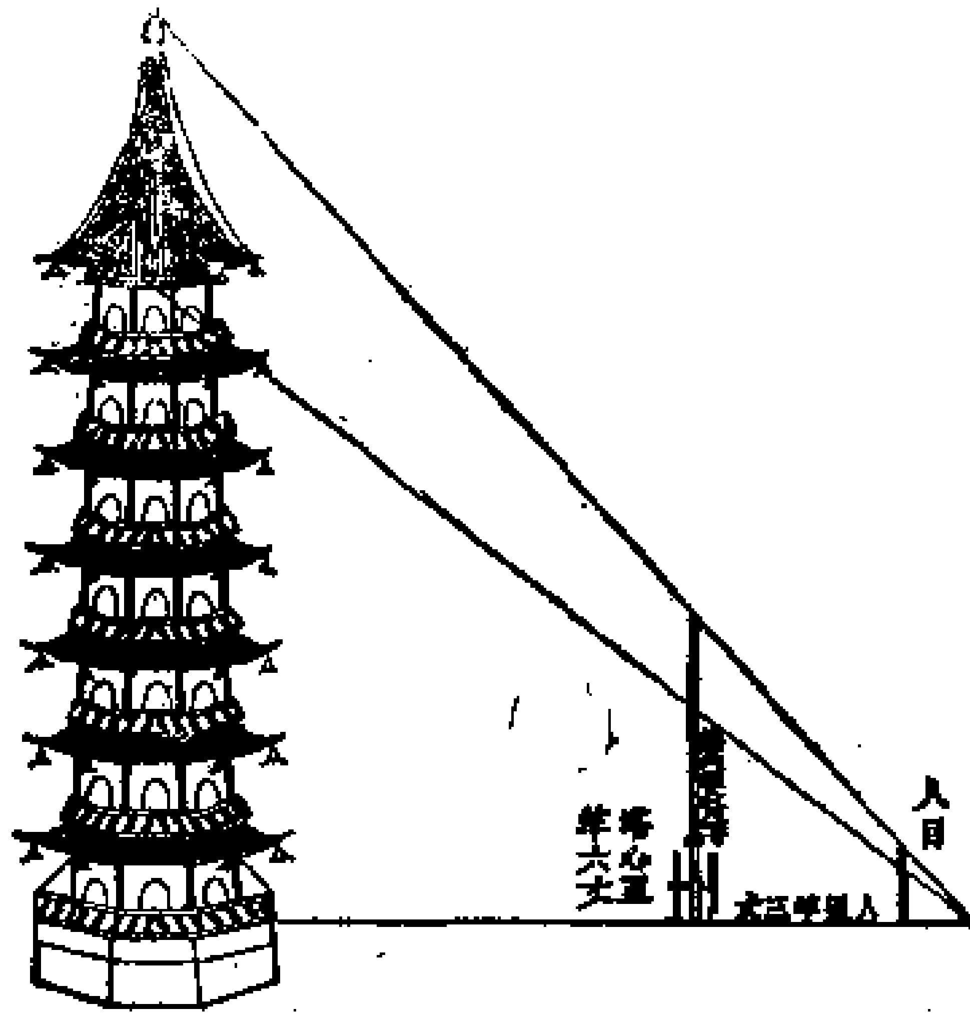


图 35　望塔

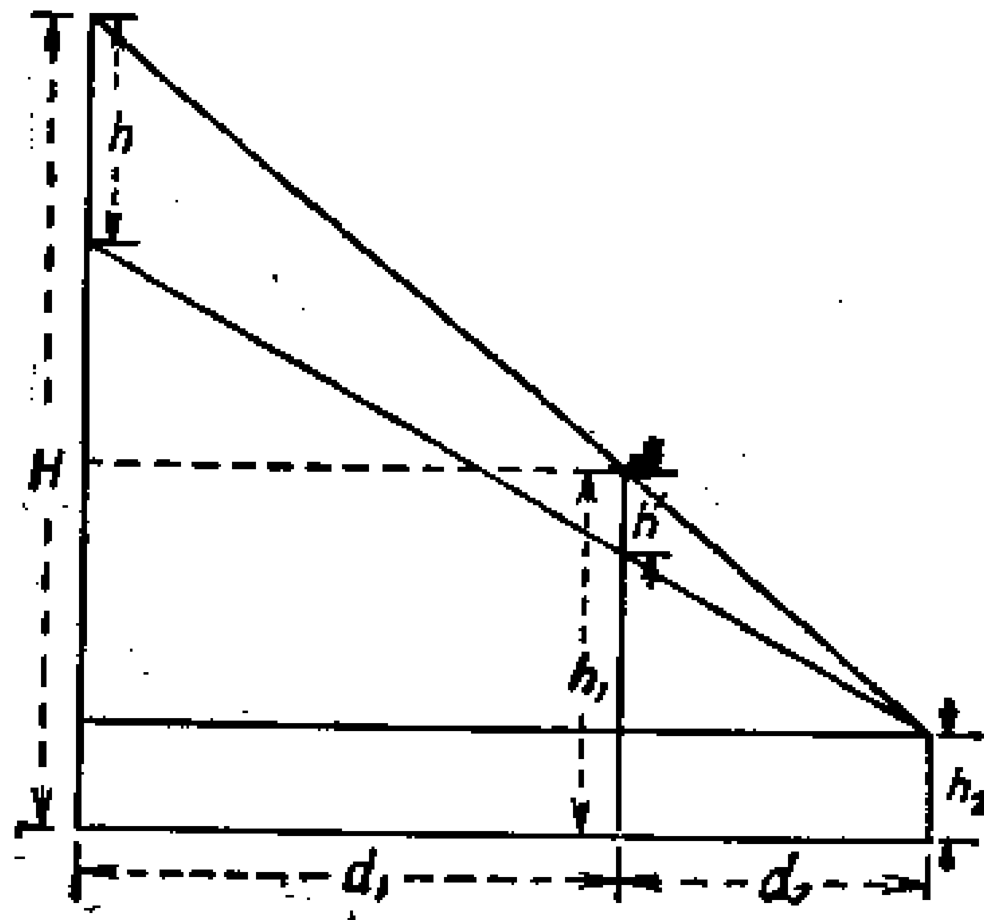


图　36

$$\therefore \quad H=\frac{(h_1-h_2)d_1}{d_2}+h_1 \tag{β}$$

$$h'=(n-1)a_1 \tag{γ}$$

$$\because \frac{h}{h'}=\frac{d_1+d_2}{d_2},$$

$$\therefore \quad h=\frac{h'(d_1+d_2)}{d_2} \tag{δ}$$

$$\text{塔身高}=H-h \tag{ε}$$

$$\text{塔心木长}=H-h+b_1 \tag{ζ}$$

【注】 秦氏本问致误的原因，是由

$$\frac{h}{h'}=\frac{d_1}{d_2} \tag{η}$$

而求得 h 的.

【原草】 草曰：置镝 14 枚，减 1，余 13，以乘镝相去 2 尺 5 寸得 325 寸，并最上镝一枚长 5 寸，得 330 寸，又加竿本 9 尺 2 寸，共得 422 寸，为表竿高．以人退表 3 丈，通为 300 寸，为法．次以人目高 4 尺 8 寸，减表竿高 422 寸，余 374 寸，以乘竿去塔 6 丈，得 224400 寸，为实．实如法 300 而一，得 748 寸，加表竿高 422 寸，得 1170 寸，以 10 约之，为 11 丈 7 尺，为塔高．置相轮本入第 7 镝减 1，余 6，以乘镝相去 2 尺 5 寸，得 150 寸，为上(原无“为上”二字.)．又人退竿 3 丈，并竿去塔 6 丈，得 900 寸，以乘上 150 寸，得 135000 寸(原为“又乘竿去塔 6 丈，得 9 万寸.”)，为实．实如前法 300 寸而一，得 450 寸(原为“300 寸.”)，约为 4 丈 5 尺(原为“3 丈”.)，得相轮高．以相轮高 4 丈 5 尺(原为“3 丈”.)，减塔高 11 丈 7 尺，余 7 丈 2 尺(原为“8 丈 7 尺”.)，为塔身高．益 3 尺，为剪截楯卯，共得 7 丈 5 尺(原为“9 丈”.)，为塔心木长．合问.

【新释】 已知：$m=14$，$a_1=25$ 寸，$b=92$ 寸，$a=5$ 寸，代入 (α)式，得

$$h_1=(14-1)\times 25+5+92=422\text{ 寸}.$$

又知：$h_2=48$ 寸，$d_1=600$ 寸，$d_2=300$ 寸．代入(β)式，得

$$H=\frac{(422-48)\times 600}{300}+422=\frac{224400}{300}+422$$

$$=748+422=1170\text{ 寸}=11\text{ 丈 }7\text{ 尺}.$$

又 $n=7$，于是

$$h'=(7-1)\times 25=150\text{ 寸}.$$

由(δ)式，得

$$h=\frac{150\times(600+300)}{300}=\frac{135000}{300}$$

$$=450\text{ 寸}=4\text{ 丈 }5\text{ 尺}.$$

复由(ε)式，得

塔身高$=117-45=72$ 尺$=7$ 丈 2 尺.

又因 $b_1=3$ 尺，故

塔心木长$=72+3=75$ 尺$=7$ 丈 5 尺.

第五章 赋 役 类

本章所设各问，均系社会实践中时常发生的问题，尤以“复邑修赋”一问，等级非常复杂，数字又很庞大，而秦氏应用配分比例的方法，给出了清晰的叙述．这对于搞计划工作来说，尤其知道了各地的具体情况之后，作季度或年度生产计划和分配生产任务数字时，是有着一定的参考价值的．

在“宽减屯租”一问中，又应用了连锁比例．

在“均定劝分”一问中，也应用到等差级数求公差的公式：

$$d=\frac{b_n-b_1}{n-1}.$$

式中 d 为公差，b_1 为首项，b_n 为末项，n 为项数．

第九卷 凡 一 问

37．复 邑 修 赋

问有海坍县地，今已复涨，岁久乡井再成，申请复邑称土，排到六乡，以附郭为甲，最远为己，各有田九等，开具下项：

甲乡，共计田一十四万一百九十三亩三角一十二步．

上等上田，五千六百七十八亩一角四十八步，

中田，四千八百九十二亩三十步，

下田，六千六百二十一亩五十四步．

中等上田，八千二百二十五亩二十四步，

中田，一万三十五亩六步，

下田，一万六千五百三十亩.

下等上田，二万一千九十亩二十四步，

中田，三万二千六十亩三步，

下田，三万五千六十一亩三角三步.

乙乡，田共计八万四千一十亩二角二步.

上等上田，六千七百八十九亩一角三十六步，

中田，五千九百八十七亩二角，

下田，八千一十亩三角三步.

中等上田，七千五百四十一亩，

中田，九千一百二十一亩二角一十二步，

下田，一万九千六十六亩六步.

下等上田，一万八千三十七亩一角六步，

中田，九千四百五十六亩三角五十九步，

下田，无.

丙乡，田共计一十二万九百三十五亩五十八步五分.

上等上田，四千八百六十八亩二角三步，

中田，五千九百七十九亩三角六步，

下田，六千八百八十八亩二角六步.

中等上田，七千九百八十四亩一角，

中田，一万四千五十六亩一十二步，

下田，二万三千三百三十三亩一十二步.

下等上田，二万七千七百五十五亩一十六步五分，

中田，无，

下田，三万七十亩三步.

丁乡，田共计八万九千六十六亩二步三分.

上等上田，一万一千一百二亩一步，

中田，九千八百七十六亩一角，

下田，八千七百六十五亩一角三十步，

中等上田，七千五百三十九亩三十四步三分，

中田，无，

下田，一万二千九百八十七亩四十二步。

下等上田，无，

中田，五千四百三十二亩一角六步，

下田，三万三千三百六十三亩三角九步。

戊乡：田共计二十万四千四百七十四亩一角二十四步四分。

上等上田，二万四千六百三十二亩三十九步，

中田，一万三千五百二十一亩二十七步，

下田，九千九百八十八亩三角三步。

中等上田，八千八百七十七亩五十六步四分，

中田，一万一千三百三十三亩三角，

下田，二万七千六十七亩。

下等上田，一万九千八百七十六亩三角六步，

中田，七万九千一百三十五亩三角四十三步，

下田，一万四十一亩二角三十步。

己乡，田共计一十五万八千四百六十亩三角十八步二分。

上等上田，无，

中田，七千七百八十八亩三角五十一步，

下田，无。

中等上田，九千九百九十九亩一角六十三步，

中田，一万八百三十六亩五十六步，

下田，无。

下等上田，三万二千八十九亩一角四十五步六分，

中田，四万三千六百七十八亩二角五十七步，

下田，五万四千六十七亩三角四十五步六分。

照得昨来本县元科苗米，一十万三千五百六十七石八斗四升四合二勺，和买，一万三千四百九十八匹一丈七尺三寸七分五厘，夏税，

九千八百七十六匹三丈二尺六寸五分六厘．其六乡田，系三色，甲为上，乙丙为次，丁戊己又为次，先令官物为三差，使上比中，中比下，皆十分外差一，次令各乡九等，皆于十分内差一抛科，用合租额．其乙乡田最肥，次丁，次甲，次丙，次己，次戊．欲知三色等每亩等则，及共科数，各乡几何？

答曰：甲乡上等上田苗，三斗二升三合二勺，
和，一尺六寸九分，
税，一尺二寸三分．
中田苗，二斗九升九勺，
和，一尺五寸二分，
税，一尺一寸一分．
下田苗，二斗五升八合六勺，
和，一尺三寸五分，
税，九寸九分．
中等上田苗，二斗二升六合二（原为"三"）勺，
和，一尺一寸八分，
税，八寸六分．
中田苗，一斗九升三合九勺，
和，一尺一分，
税，七寸四分．
下田苗，一斗六升一合六勺，
和，八寸四分，
税，六寸二分．
下等上田苗，一斗二升九合三勺，
和，六寸七分，
税，四寸九分．
中田苗，九升七合，
和，五寸一分，

税，三寸七分.

下田苗，六升四合六勺，

和，三寸四分，

税，二寸五分.

乙乡上等上田苗，三斗六升三合三勺，

和，一尺八寸九分，

税，一尺三寸九分.

中田苗，三斗二升七合，

和，一尺七寸，

税，一尺二寸五分.

下田苗，二斗九升六勺，

和，一尺五寸二分，

税，一尺一寸一分.

中等上田苗，二斗五升四合三勺，

和，一尺三寸三分，

税，九寸七分.

中田苗，二斗一升八合，

和，一尺一寸四分，

税，八寸三分.

下田苗，一斗八升一合六勺，

和，九寸五分，

税，六寸九分.

下等上田苗，一斗四升五合三勺，

和，七寸六分，

税，五寸五分.

中田苗，一斗九合，

和，五寸七分，

税，四寸二分.

下田苗，七升二合七勺，
和，三寸八分，
税，二寸八分.
丙乡上等上田苗，三斗三合五勺，
和，一尺五寸八分，
税，一尺一寸六分.
中田苗，二斗七升三合一勺，
和，一尺四寸二分，
税，一尺四分.
下田苗，二斗四升二合八勺，
和，一尺二寸七分，
税，九寸三分.
中等上田苗，二斗一升二合四勺，
和，一尺一寸一分，
税，八寸一分.
中田苗，一斗八升二合一勺（原为"一斗八升三合"），
和，九寸五分，
税，六寸九分.
下田苗，一斗五升一合七勺，
和，七寸九分，
税，五寸八分.
下等上田苗，一斗二升一合四勺，
和，六寸三分，
税，四寸六分.
中田苗，九升一合，
和，四寸七分，
税，三寸五分.

下田苗，六升七勺，
和，三寸二分，
税，二寸三分。
丁乡上等上田苗，三斗四升三合二勺，
和，一尺七寸九分，
税，一尺三寸一分。
中田苗，三斗八合九勺，
和，一尺六寸一分，
税，一尺一寸八分。
下田苗，二斗七升四合六勺，
和，一尺四寸三分，
税，一尺五分。
中等上田苗，二斗四升三(原为"二")勺，
和，一尺二寸五分，
税，九寸二分。
中田苗，二斗五合九勺，
和，一尺七分，
税，七寸九分。
下田苗，一斗七升一合六(原为"七")勺，
和，八寸九分，
税，六寸五分。
下等上田苗，一斗三升七合三勺，
和，七寸二分，
税，五寸二分。
中田苗，一斗三合，
和，五寸四分，
税，三寸九分。
下田苗，六升八合六勺，

和，三寸六分，

税，二寸六分.

戊乡上等上田苗，一斗五升三合八勺，

和，八寸，

税，五寸九分.

中田苗，一斗三升八合四勺，

和，七寸二分，

税，五寸三分.

下田苗，一斗二升三合一勺（原为"一斗二升三合"），

和，六寸四分，

税，四寸七分.

中等上田苗，一斗七合七勺，

和，五寸六分，

税，四寸一分.

中田苗，九升二合三勺，

和，四寸八分，

税，三寸五分.

下田苗，七升六合九勺，

和，四寸，

税，二寸九分.

下等上田苗，六升一合五勺，

和，三寸二分，

税，二寸三分.

中田苗，四升六合一勺，

和，二寸四分，

税，一寸八分.

下田苗，三升八勺，

和，一寸六分，

税，一寸二分.

己乡上等上田苗，二斗八升二合二(原为"一")勺，

和，一尺四寸七分，

税，一尺八分.

中田苗，二斗五升三合九勺，

和，一尺三寸二分，

税，九寸七分.

下田苗，二斗二升五合七勺，

和，一尺一寸八分，

税，八寸六分.

中等上田苗，一斗九升七合五勺，

和，一尺三分，

税，七寸五分.

中田苗，一斗六升九合三勺，

和，八寸八分，

税，六寸五分.

下田苗，一斗四升一合一勺，

和，七寸四分，

税，五寸四分.

下等上田苗，一斗一升二合九勺，

和，五寸九分，

税，四寸三分.

中田苗，八升四合六勺，

和，四寸四分，

税，三寸二分.

下田苗，五升六合四勺，

和，二寸九分，

税，二寸二分.

甲乡苗米，一万九千五百五十石二斗四升八合三勺，

和买，一万一百九十二丈二尺六寸五分六厘，

夏税，七千四百五十七丈六尺八寸九分八厘.

乙乡苗米，一万七千七百七十二石九斗五升三合，

和买，九千二百六十五丈六尺九寸六分，

夏税，六千七百七十九丈七尺一寸八分.

丙乡苗米，一万七千七百七十二石九斗五升三合，

和买，九千二百六十五丈六尺九寸六分，

夏税，六千七百七十九丈七尺一寸八分.

丁乡苗米，一万六千一百五十七石二斗三升，

和买，八千四百二十三丈三尺六寸，

夏税，六千一百六十三丈三尺八寸.

戊乡苗米，一万六千一百五十七石二斗三升，

和买，八千四百二十三丈三尺六寸，

夏税，六千一百六十三丈三尺八寸.

己乡苗米，一万六千一百五十七石二斗三升，

和买，八千四百二十三丈三尺六寸，

夏税，六千一百六十三丈三尺八寸.

术曰：以衰分求之，先列本县色位，自下锥行列之，又以乡数对列而乘之，副并为法，以除诸官物数，得一分之率，以率数乘未并者，各得诸乡之数.次列各乡等位，自上等置十分，每以内分锥行，九折之，至九等止(原为"之")．又各以亩步乘之，副并为乡法，以除诸各乡所得官物数，所得为一分之率，以乘未并者，各得每亩税色.

【新释】 设元科苗米 a 石，和买 b 丈，夏税 c 丈，上等乡数为 n_1，中等乡数为 n_2，下等乡数为 n_3．又设三等色位之比为

$$上:中:下=\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3,$$

则得

$$苗米一分率:\ a_0=\frac{a}{\sum n\alpha} \qquad (\alpha)$$

$$和买一分率:\ b_0=\frac{b}{\sum n\alpha} \qquad (\beta)$$

$$夏税一分率:\ c_0=\frac{c}{\sum n\alpha} \qquad (\gamma)$$

而各乡合科数为

$$上等乡苗米:\ a_1=\frac{a\alpha_1}{\sum n\alpha} \qquad (\alpha_1)$$

$$和买:\ b_1=\frac{b\alpha_1}{\sum n\alpha} \qquad (\beta_1)$$

$$夏税:\ c_1=\frac{c\alpha_1}{\sum n\alpha} \qquad (\gamma_1)$$

$$中等乡苗米:\ a_2=\frac{a\alpha_2}{\sum n\alpha} \qquad (\alpha_2)$$

$$和买:\ b_2=\frac{b\alpha_2}{\sum n\alpha} \qquad (\beta_2)$$

$$夏税:\ c_2=\frac{c\alpha_2}{\sum n\alpha} \qquad (\gamma_2)$$

$$下等乡苗米:\ a_3=\frac{a\alpha_3}{\sum n\alpha} \qquad (\alpha_3)$$

$$和买:\ b_3=\frac{b\alpha_3}{\sum n\alpha} \qquad (\beta_3)$$

$$夏税:\ c_3=\frac{c\alpha_3}{\sum n\alpha} \qquad (\gamma_3)$$

复设各等田亩之数为 A_{11}, A_{12}, …, A_{1p}; A_{21}, A_{22}, …, A_{2p}; …; A_{61}, A_{62}, …, A_{6p}. 而其等位之比为

$$上上:上中:上下:中上:中中:中下:下上:下中:下下$$
$$=\beta_1:\beta_2:\beta_3:\beta_4:\beta_5:\beta_6:\beta_7:\beta_8:\beta_9,$$

则各乡的每分含量为

苗米：$a' = \dfrac{a_i}{\sum \beta A}$ (δ)

和买：$b' = \dfrac{b_i}{\sum \beta A}$ (ε)

夏税：$c' = \dfrac{c_i}{\sum \beta A}$ (ζ)

式中 $i=1, 2, 3$.

用 β_k 分乘每分含量，得各乡各等每亩合科和买苗税.

苗米：$a'' = \beta_k a'$ (η)

和买：$b'' = \beta_k b'$ (θ)

夏税：$c'' = \beta_k c'$ (ι)

【原草】 草曰：列本县色位三目，下色列十分，中十一分，上比中，身外加一，上得 121，中得 110，下得 100，为上中下三率. 列之右行：

右行	
丨=丨	上
丨一○	中
丨○○	下

乃列甲一，对上率，乙丙共二，对中率，丁戊己共三，对下率，列左行：

左行		右行
丨	甲	丨=丨
‖	乙丙	丨一○
Ⅲ	丁戊己	丨○○

乃以左行率数，各相对乘右行率数，其上得 121，其中得 220，其下得 300，乃副置而并之，得 641 为法. 置元科苗米 103567 石 8 斗 4 升 4 合 2 勺，为实，以法除之，得 161 石 5 斗 7 升 2 合 8 勺，为一

分之率，以未并下率 100 乘率，得 16157 石 2 斗 3 升，为丁戊己三乡各科数．以于身下加一，得 17772 石 9 斗 5 升 3 合，为乙丙二乡各科数，又于身下加一，得 19550 石 2 斗 4 升 8 合 3 勺，为甲合科数．

求和买，亦用 641 为法，置元科和买 13498 匹，以匹法 4 丈通之，得 53992 丈，内零 1 丈 7 尺 3 寸 7 分 5 厘，得 53993 丈 7 尺 3 寸 7 分 5 厘，为实．以法除之，得 84 丈 2 尺 3 寸 3 分 6 厘，为一分之率．亦以未并下率 100 乘之，得 8423 丈 3 尺 6 寸，为丁戊己三乡各科数．次于身下加一，得 9265 丈 6 尺 9 寸 6 分，为乙丙二乡各科数．又于身下加一，得 10192 丈 2 尺 6 寸 5 分 6 厘，为甲乡合科数．

求夏税，亦置 641 为法，置元科夏税 9876 匹，以匹法 4 丈通之，得 39504 丈，内零 3 丈 2 尺 6 寸 5 分 6 厘，得 39507 丈 2 尺 6 寸 5 分 6 厘，为实．以法除之，得 61 丈 6 尺 3 寸 3 分 8 厘，为一分率．亦以未并下率 100 乘之，得 6163 丈 3 尺 8 寸，为丁戊己三乡各科数．次于身下加一，得 6779 丈 7 尺 1 寸 8 分，为乙丙二乡各科数．又于身下加一，得 7457 丈 6 尺 8 寸 9 分 8 厘，为甲乡数．

次列九等，上以十，次九八七六五四三二，各对六乡九等田亩，其田亩下角步，以亩法除之，得分厘毫丝忽，接于亩下，对乘之，各得率．

甲上等上田率，56784 分 5 厘，
中田率，44029 分 1 厘 2 毫 5 丝，
下田率，52969 分 8 厘．
中等上田率，57575 分 7 厘，
中田率，60210 分 1 厘 5 毫，
下田率，82650 分．
下等上田率，84360 分 4 厘，
中田率，96180 分 3 毫 7 丝 5 忽，

下田率,70123分5厘2毫5丝.

乙上等上田率,67894分,

中田率,53887分5厘,

下田率,64086分1厘.

中等上田率,52787分,

中田率,54729分3厘,

下田率,95330分1厘2毫5丝.

下等上田率,72149分1厘,

中田率,28370分9厘9(原为"8")毫5(原为"8")丝,

下田,无.

丙上等上田率,48685分1厘2毫5丝,

中田率,53817分9厘7毫5丝,

下田率,55108分2厘.

中等上田率,55889分7厘5毫,

中田率,84336分3厘,

下田率,116665分2厘5毫.

下等上田率,111020分2厘7毫5丝,

中田,无,

下田率,60140分2毫5丝.

丁上等上田率,111020分4毫2丝(原为"111020分5毫"),

中田率,88886分2厘5毫,

下田率,70123分.

中等上田率,52774分3忽(原为"52774分4厘8毫2丝5忽"),

中田,无,

下田率,64935分8厘7毫5丝.

下等上田,无,

中田率,16296分8厘2毫5丝,

下田率,66727 分 5 厘 7 毫 5 丝.

戊上等上田率,246321 分 6 厘 2 毫 5 丝,

中田率,121690 分 1 毫 2 丝 5 忽,

下田率,79910 分 1 厘.

中等上田率,62140 分 6 厘 4 毫 5 丝,

中田率,68002 分 5 厘,

下田率,135335 分.

下等上田率,79507 分 1 厘,

中田率,237407 分 7 厘 8 毫 7 丝 5 忽,

下田率,20083 分 2 厘 5 毫.

己上等上田,无,

中田率,70100 分 6 厘 6 毫 2 丝 5 忽,

下田,无.

中等上田率,69996 分 5 厘 8 毫 7 丝 5 忽,

中田率,65017 分 4 厘(原为"65017 分 4 厘 1 毫"),

下田,无.

下等上田率,128357 分 7 厘 6 毫,

中田率,131036 分 2 厘 1 毫 2 丝 5 忽,

下田率,108135 分 8 厘 8 毫.

并六乡之九率,为六(原为"九")乡之法.

甲法,604883 分 2 厘 3 毫 7 丝 5 忽,

乙法,489234 分 1 厘 2 毫(原为"489234 分 1 厘 1 毫 3 丝"),

丙法,585662 分 9 厘,

丁法,470763 分 5 厘 6 毫 7 丝 3 忽(原为"470763 分 5 厘 7 毫 5 丝"),

戊法,1050398 分 2 毫,

己法,572644 分 5 厘(原文此处尚有"1 毫"二字) 2 丝 5 忽.

以六乡法,各除诸乡官物,得一分之率. 米至圭,帛至忽止,半已上,收;已

下，弃.

甲乡苗米,3升2合3勺2抄6圭(原为"3升2合3勺2抄1撮".),
和买,1寸6分8厘5毫(原为"1寸6分8厘5毫4忽"),
夏税,1寸2分3厘2毫9(原为"8")丝.
乙乡苗米, 3升6合3勺2抄8撮1圭,
和买,1寸8分9厘3毫9丝2忽,
夏税,1寸3分8厘5毫7丝8忽(原为"1寸3分8厘5毫8丝".).
丙乡苗米,3升3勺4抄6撮7圭("6撮7圭"原作"8撮"),
和买,1寸5分8厘2毫9忽("9忽"原作"1丝"),
夏税,1寸1分5厘7毫6丝1忽(原为"1寸1分5厘7毫5丝".).
丁乡苗米,3升4合3勺2抄1撮3(原为"4")圭,
和买,1寸7分8厘9毫3丝,
夏税,1寸3分9毫2丝3忽.
戊乡苗米,1升5合3勺8抄2撮,
和买,8分1毫9丝2忽,
夏税,5分8厘6毫7丝7忽.
己乡苗米,2升8合2勺1抄5撮1圭,
和买,1寸4分7厘9丝6忽,
夏税,1寸7厘6毫3丝.

用各乡锥行数十九八七六五四三二,各乘一分之率,为各乡每亩等则泛数. 或自上等上田之则,以一分之率,累减之,亦得.

甲乡上等上田苗米,3斗2升3合2勺6撮("6撮"原作1抄),
和买,1尺6寸8分5厘(原有"4丝"二字.),
夏税,1尺2寸3分2厘9(原为"8")毫.
中田苗米,2斗9升8勺8抄5撮4圭(原为"2斗9

升8勺8抄9撮”.),

和买,1尺5寸1分6厘5毫(原有“3丝6忽”四字.),

夏税,1尺1寸9厘6(原为“5”)毫1(原为“2”)丝.

下田苗米,2斗5升8合5勺6抄4撮8圭(原为“2斗5升8合5勺6抄8撮”.),

和买,1尺3寸4分8厘(原为“1尺3寸4分8厘3丝2忽”),

夏税,9寸8分6厘3(原为“2”)毫2(原为“4”)丝.

中等上田苗米,2斗2升6合2勺4抄4撮2圭(原为“2斗2升6合2勺4抄7撮”),

和买,1尺1寸7分9厘5毫(原为“1尺1寸7分9厘5毫2丝8忽”),

夏税,8寸6分3厘3丝(原为“8寸6分2厘9毫6丝”).

中田苗米,1斗9升3合9勺2抄3撮6圭(原为“1斗9升3合9勺2抄6撮”),

和买,1尺1分1厘(原尚有“2丝4忽”四字),

夏税,7寸3分9厘7(原为“6”)毫4(原为“8”)丝.

下田苗米,1斗6升1合6勺3(原为“5”)撮,

和买,8寸4分2厘5毫(原尚有“2丝”二字),

夏税,6寸1分6厘4毫5丝(原无“5丝”二字.),

下等上田苗米,1斗2升9合2勺8抄2撮4圭(原为“1斗2升9合2勺8抄4撮”.),

和买,6寸7分4厘(原尚有"1丝6忽"四字.),

夏税,4寸9分3厘1毫6(原为"2")丝.

中田苗米,9升6合9勺6抄1撮8圭(原为"9升6合9勺6抄3撮".),

和买,5寸5厘5毫(原尚有"1丝2忽"四字.),

夏税,3寸6分9厘8毫7(原为"4")丝.

下田苗米,6升4合6勺4抄1撮2圭(原为"6升4合6勺4抄2撮".),

和买,3寸3分7厘(原尚有"8忽"二字.),

夏税,2寸4分6厘5毫8(原为"6")丝.

乙乡上等上田苗米,3斗6升3合2勺8抄1撮(原无"1撮"二字.),

和买,1尺8寸9分3厘9毫2丝,

夏税,1尺3寸8分5厘7毫8丝(原为"1尺3寸8分5厘8毫".).

中田苗米,3斗2升6合9勺5抄2撮9圭(原无"9圭"二字.),

和买,1尺7寸4厘5毫2丝8忽,

夏税,1尺2寸4分7厘2毫2忽("2忽"原作"2丝".).

下田苗米,2斗9升6勺2抄4撮8圭(原无"8圭"二字.),

和买,1尺5寸1分5厘1毫3丝6忽,

夏税,1尺1寸8厘6毫2丝4忽("2丝4忽"原作"4丝".).

中等上田苗米,2斗5升4合2勺9抄6撮7圭(原无"7圭"二字.),

和买,1尺3寸2分5厘7毫4丝4忽,

夏税，9寸7分4丝6忽（“4丝6忽”原作“6丝”。），

中田苗米，2斗1升7合9勺6抄8撮6圭(原无“6圭”二字。)，

和买，1尺1寸3分6厘3毫5丝2忽，

夏税，8寸3分1厘4毫6丝8忽(“6丝8忽”原作“8丝”。)。

下田苗米，1斗8升1合6勺4抄5圭(原无“5圭”二字。)，

和买，9寸4分6厘9毫6丝，

夏税，6寸9分2厘8毫9丝(“8毫9丝”原作“9毫”。)。

下等上田苗米，1斗4升5合3勺1抄2撮4圭(原无“4圭”二字。)，

和买，7寸5分7厘5毫6丝8忽，

夏税，5寸5分4厘3毫1丝2忽(原为“5寸6分4厘3毫2丝”。)。

中田苗米，1斗8合9勺8抄4撮3圭(原无“3圭”二字。)，

和买，5寸6(原为“5”)分8厘1毫7丝6忽，

夏税，4寸1分5厘7毫3丝4忽(“3丝4忽”原作“4丝”。)。

下田苗米，7升2合6勺5抄6撮2圭(原无“2圭”二字。)，

和买，3寸7分8厘7毫8丝4忽，

夏税，2寸7分7厘1毫5丝6忽(原为“2寸7分7厘1毫6丝”。)。

丙乡上等上田苗米，3斗3合4勺6抄7撮(“6抄7撮”原作

"8抄".),

和买,1尺5寸8分2厘9丝(原为"1尺5寸8分2厘1毫".),

夏税,1尺1寸5分7厘6毫1丝("6毫1丝"原作"5毫".).

中田苗米,2斗7升3合1勺2抄3圭("2抄3圭"原作"3抄2撮".),

和买,1尺4寸2分3厘8毫8丝1忽("8丝1忽"原作"9丝".),

夏税,1尺4分1厘8毫4丝9忽(原为"1尺4分1厘7毫5丝".).

下田苗米,2斗4升2合7勺7抄3撮6圭(原为"2斗4升2合7勺8抄4撮".),

和买,1尺2寸6分5厘6毫7丝2忽("7丝2忽"原作"8丝".),

夏税,9寸2分6厘8丝8忽(原无"8丝8忽"四字.).

中等上田苗米,2斗1升2合4勺2(原为"3")抄6撮9圭(原无"9圭"二字.),

和买,1尺1寸7厘4毫6丝3忽("6丝3忽"原作"7丝".),

夏税,8寸1分3毫2丝7忽(原为"8寸1分2毫5丝".).

中田苗米,1斗8升2合8抄2圭("2圭"原作"8撮".),

和买,9寸4分9厘2毫5丝4忽("5丝4忽"原作"6丝".),

夏税,6寸9分4厘5毫6丝6忽(原无"6丝6

忽”四字．）．

下田苗米，1斗5升1合7勺3抄3撮5圭（“3抄3撮5圭”原作“4抄”．），

和买，7寸9分1厘4丝5忽（“4丝5忽”原作“5丝”．），

夏税，5寸7分8厘8毫5忽（“8毫5忽”原作“7毫5丝”．）．

下等上田苗米，1斗2升1合3勺8抄6撮8圭（“8抄6撮8圭”原作“9抄2撮”．），

和买，6寸3分2厘8毫3丝6忽（“3丝6忽”原作“4丝”．），

夏税，4寸6分3厘4丝4忽（原无“4丝4忽”四字．）．

中田苗米，9升1合4抄1圭（“1圭”原作“4撮”．），

和买，4寸7分4厘6毫2丝7忽（“2丝7忽”原作“3丝”．），

夏税，3寸4分7厘2毫8丝3忽（原无“8丝3忽”四字．）．

下田苗米，6升6勺9抄3撮4圭（“3撮4圭”原作“6撮”．），

和买，3寸1分6厘4毫1丝8忽（“1丝8忽”原作“2丝”．），

夏税，2寸3分1厘5毫2丝2忽（原无“2丝2忽”四字．）．

丁乡上等上田苗米，3斗4升3合2勺1抄3（原为“4”）撮，

和买，1尺7寸8分9厘3毫，

夏税，1尺8寸9厘2毫3丝．

中田苗米，3斗8合9勺1抄1撮7圭（原为“3斗8

合8勺9抄2撮6圭".),

和买,1尺6寸1分3毫7丝,

夏税,1尺1寸7分8厘3毫7忽.

下田苗米,2斗7升4合5勺9抄4圭(原为"2斗7升4合5勺7抄1撮2圭".),

和买,1尺4寸3分1厘4毫4丝,

夏税,1尺4分7厘3毫8丝4忽.

中等上田苗米,2斗4升2勺5(原为"4")抄9撮1(原为"8")圭,

和买,1尺2寸5分2厘5毫1丝,

夏税,9寸1分6厘4毫6丝1忽.

中田苗米,2斗5合9勺3抄7撮8圭(原为"2斗5合9勺2抄8撮4圭".),

和买,1尺7分3厘5毫8丝,

夏税,7寸8分5厘5毫3丝8忽.

下田苗米,1斗7升1合6勺1抄6撮5圭(原为"1斗7升1合6勺7撮".),

和买,8寸9分4厘6毫5丝,

夏税,6寸5分4厘6毫1丝5忽.

下等上田苗米,1斗3升7合2勺9(原为"8")抄5撮2(原为"6")圭,

和买,7寸1分5厘7毫2丝,

夏税,5寸2分3厘6毫9丝2忽.

中田苗米,1斗2合9勺7抄3撮9圭(原为"1斗2合9勺6抄4撮2圭".),

和买,5寸3分6厘7毫9丝,

夏税,3寸9分2厘7毫6丝9忽.

下田苗米,6升8合6勺4抄2撮6(原为"8")圭,

和买,3寸5分7厘8毫6丝,
夏税,2寸6分1厘8毫4丝6忽。
戊乡上等上田苗米,1斗5升3合8勺2抄,
和买,8寸1厘9毫2丝,
夏税,5寸8分6厘7毫7丝。
中田苗米,1斗3升8合4勺3抄8撮,
和买,7寸2分1厘7毫2丝8忽,
夏税,5寸2分8厘9丝3忽。
下田苗米,1斗2升3合5抄6撮,
和买,6寸4分1厘5毫3丝6忽,
夏税,4寸6分9厘4毫1丝6忽。
中等上田苗米,1斗7合6勺7抄4撮,
和买,5寸6分1厘3毫4丝4忽,
夏税,4寸1分7毫3丝9忽。
中田苗米,9升2合2勺9抄2撮,
和买,4寸8分1厘1毫5丝2忽,
夏税,3寸5分2厘6丝2忽。
下田苗米,7升6合9勺1抄,
和买,4寸9毫6丝,
夏税,2寸9分3厘3毫8丝5忽。
下等上田苗米,6升1合5勺2抄8撮,
和买,3寸2分7毫6丝8忽,
夏税,2寸3分4厘7毫8忽。
中田苗米,4升6合1勺4抄6撮,
和买,2寸4分5毫7丝6忽,
夏税,1寸7分6厘3丝1忽。
下田苗米,3升7勺6抄4撮,
和买,1寸6分3毫8丝4忽,

夏税,1寸1分7厘3毫5丝4忽.

己乡上等上田苗米,2斗8升2合1勺5抄1撮,

和买,1尺4寸7分9毫6丝,

夏税,1尺7分6厘3毫.

中田苗米,2斗5升3合9勺3抄5撮9圭,

和买,1尺3寸2分3厘8毫6丝4忽,

夏税,9寸6分8厘6毫7丝.

下田苗米,2斗2升5合7勺2抄8圭,

和买,1尺1寸7分6厘7毫6丝8忽,

夏税,8寸6分1厘4丝.

中等上田苗米,1斗9升7合5勺5撮7圭,

和买,1尺2分9厘6毫7丝2忽,

夏税,7寸5分3厘4毫1丝.

中田苗米,1斗6升9合2勺9抄6圭,

和买,8寸8分2厘5毫7丝6忽,

夏税,6寸4分5厘7毫8丝.

下田苗米,1斗4升1合7抄5撮5圭,

和买,7寸3分5厘4毫8丝,

夏税,5寸3分8厘1毫5丝.

下等上田苗米,1斗1升2合8勺6抄4圭,

和买,5寸8分8厘3毫8丝4忽,

夏税,4寸3分5毫2丝.

中田苗米,8升4合6勺4抄5撮3圭,

和买,4寸4分1厘2毫8丝8忽,

夏税,3寸2分2厘8毫9丝.

下田苗米,5升6合4勺8抄2圭,

和买,2寸9分4厘1毫9丝2忽,

夏税,2寸1分5厘2毫6丝.

已上田则苗至勺，绢至分，收归为等则定数，答在前.

【注 1】 馆案云："题内云各乡九等，皆于十分内差一，则是递次九折也. 术内亦云列各乡等位，自上等置十分，每以内分错行九折之，至九等止，则其法当为递次九折益明矣. 乃草中则云上以十，次九八七六五四三二，则是递次减一，而非递次九折矣. ……"

【注 2】 原草尾数每有误差，清李锐曾作局部校正，今全部订正，然此乃系布算之误耳.

【新释】 已知：$a=103567.8442$ 石，$b=13498$ 匹 1.7375 丈 $=53993.7375$ 丈，$c=9876$ 匹 3.2656 丈 $=39507.2656$ 丈. $n_1=1, n_2=2, n_3=3$.

$$\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3=121:110:100,$$

因得

苗米一分率：$a_0=\dfrac{a}{\sum n\alpha}=\dfrac{103567.8442}{641}=161.5723$ 石，

和买一分率：$b_0=\dfrac{b}{\sum n\alpha}=\dfrac{53993.7375}{641}=84.2336$ 丈，

夏税一分率：$c_0=\dfrac{c}{\sum n\alpha}=\dfrac{39507.2656}{641}=61.6338$ 丈.

从而可得

下等乡即丁戊已三乡各科苗米：

$$a_3=\frac{a\alpha_3}{\sum n\alpha}=100\times161.5723=16157.23 \text{ 石},$$

中等乡即乙丙二乡各科苗米：

$$a_2=\frac{a\alpha_2}{\sum n\alpha}=110\times161.5723=17772.953 \text{ 石},$$

上等乡即甲乡合科苗米：

$$a_1=\frac{a\alpha_1}{\sum n\alpha}=121\times161.5723=19550.2483 \text{ 石}.$$

下等乡即丁戊已三乡各科和买：

$$b_3=\frac{b\alpha_3}{\sum n\alpha}=100\times84.2336=8423.36 \text{ 丈},$$

中等乡即乙丙二乡各科和买：

$$b_2=\frac{b\alpha_2}{\sum n\alpha}=110\times 84.2336=9265.696 \text{ 丈},$$

上等乡即甲乡合科和买：

$$b_1=\frac{b\alpha_1}{\sum n\alpha}=121\times 84.2336=10192.2656 \text{ 丈}.$$

下等乡即丁戊己三乡各科夏税：

$$c_3=\frac{c\alpha_3}{\sum n\alpha}=100\times 61.6338=6163.38 \text{ 丈},$$

中等乡即乙丙二乡各科夏税：

$$c_2=\frac{c\alpha_2}{\sum n\alpha}=110\times 61.6338=6779.718 \text{ 丈},$$

上等乡即甲乡合科夏税：

$$c_1=\frac{c\alpha_1}{\sum n\alpha}=121\times 61.6338=7457.6898 \text{ 丈}.$$

复知：

$\beta_1:\beta_2:\beta_3:\beta_4:\beta_5:\beta_6:\beta_7:\beta_8:\beta_9=10:9:8:7:6:5:4:3:2,$

$A_{11}=5678.45$ 亩，$A_{12}=4892.125$ 亩，

$A_{13}=6621.225$ 亩，$A_{14}=8225.1$ 亩，

$A_{15}=10035.025$ 亩，$A_{16}=16530$ 亩，

$A_{17}=21090.1$ 亩，$A_{18}=32060.0125$ 亩，

$A_{19}=35061.7625$ 亩，$A_{21}=6789.4$ 亩，

$A_{22}=5987.5$ 亩，$A_{23}=8010.7625$ 亩，

$A_{24}=7451$ 亩，$A_{25}=9121.55$ 亩，

$A_{26}=19066.025$ 亩，$A_{27}=18037.275$ 亩，

$A_{28}=9456.995833\cdots$ 亩，$A_{29}=0$；

$A_{31}=4868.5125$ 亩，$A_{32}=5979.775$ 亩，

$A_{33}=6888.525$ 亩，$A_{34}=7984.25$ 亩，

$A_{35}=14056.05$ 亩，$A_{36}=23333.05$ 亩，

$A_{37}=27755.06875$ 亩，$A_{38}=0$，

$A_{39}=30070.0125$ 亩；$A_{41}=11102.0042$ 亩，

$A_{42}=9876.25$ 亩，$A_{43}=8765.375$ 亩，

$A_{44}=7539.1429$ 亩，$A_{45}=0$，

$A_{46}=12987.175$ 亩，$A_{47}=0$，

$A_{48}=5432.275$ 亩，$A_{49}=33363.7875$ 亩；

$A_{51}=24632.1625$ 亩，$A_{52}=13521.1125$ 亩，

$A_{53}=9988.7625$ 亩，$A_{54}=8877.235$ 亩，

$A_{55}=11333.75$ 亩，$A_{56}=27067$ 亩，

$A_{57}=19876.775$ 亩；$A_{58}=79135.92917$ 亩，

$A_{59}=10041.625$ 亩，$A_{61}=0$，

$A_{62}=7788.9625$ 亩，$A_{63}=0$，

$A_{64}=9999.5125$ 亩，$A_{65}=10836.23333$ 亩，

$A_{66}=0$，$A_{67}=32089.44$ 亩，

$A_{68}=43678.7375$ 亩，$A_{69}=54067.94$ 亩。

因得各乡各等田率：

甲上等上田率 $=\beta_1 A_{11}=56784.5$，

中田率 $=\beta_2 A_{12}=44029.125$，

下田率 $=\beta_3 A_{13}=52969.8$；

中等上田率 $=\beta_4 A_{14}=57575.7$，

中田率 $=\beta_5 A_{15}=60210.15$，

下田率 $=\beta_6 A_{16}=82650$；

下等上田率 $=\beta_7 A_{17}=84360.4$，

中田率 $=\beta_8 A_{18}=96180.0375$，

下田率 $=\beta_9 A_{19}=70123.525$。

乙上等上田率 $=\beta_1 A_{21}=67894$，

中田率 $=\beta_2 A_{22}=53887.5$，

下田率 $=\beta_3 A_{23}=64086.1$，

中等上田率$=\beta_4A_{24}=52787$,

中田率$=\beta_5A_{25}=54729.3$,

下田率$=\beta_6A_{26}=95330.125$;

下等上田率$=\beta_7A_{27}=72149.1$,

中田率$=\beta_8A_{28}=28370.995$,

下田，无.

丙上等上田率$=\beta_1A_{31}=48685.125$,

中田率$=\beta_2A_{32}=53817.975$,

下田率$=\beta_3A_{33}=55108.2$;

中等上田率$=\beta_4A_{34}=55889.75$,

中田率$=\beta_5A_{35}=84336.3$,

下田率$=\beta_6A_{36}=116665.25$;

下等上田率$=\beta_7A_{37}=111020.275$,

中田，无,

下田率$=\beta_9A_{39}=60140.025$.

丁上等上田率$=\beta_1A_{41}=111020.042$,

中田率$=\beta_2A_{42}=88886.25$,

下田率$=\beta_3A_{43}=70123$;

中等上田率$=\beta_4A_{44}=52774.003$,

中田，无,

下田率$=\beta_6A_{46}=64935.875$;

下等上田，无,

中田率$=\beta_8A_{48}=16296.825$,

下田率$=\beta_9A_{49}=66727.575$.

戊上等上田率$=\beta_1A_{51}=246321.625$,

中田率$=\beta_2A_{52}=121690.0125$,

下田率$=\beta_3A_{53}=79910.1$;

中等上田率$=\beta_4A_{54}=62140.645$,

中田率 $=\beta_5 A_{55}=68002.5$,

下田率 $=\beta_6 A_{56}=135335$;

下等上田率 $=\beta_7 A_{57}=79507.1$,

中田率 $=\beta_8 A_{58}=237407.7875$,

下田率 $=\beta_9 A_{59}=20083.25$.

已上等上田,无,

中田率 $=\beta_2 A_{62}=70100.6625$,

下田,无;

中等上田率 $=\beta_4 A_{64}=69996.5875$,

中田率 $=\beta_5 A_{65}=65017.4$,

下田,无;

下等上田率 $=\beta_7 A_{67}=128357.76$,

中田率 $=\beta_8 A_{68}=131036.2125$,

下田率 $=\beta_9 A_{69}=108135.88$.

$$甲法=\sum_{i=1}^{9}\beta_i A_{1i}=604883.2375,$$

$$乙法=\sum_{i=1}^{9}\beta_i A_{2i}=489234.12,$$

$$丙法=\sum_{i=1}^{9}\beta_i A_{3i}=585662.9,$$

$$丁法=\sum_{i=1}^{9}\beta_i A_{4i}=470763.5673,$$

$$戊法=\sum_{i=1}^{9}\beta_i A_{5i}=1050398.02,$$

$$己法=\sum_{i=1}^{9}\beta_i A_{6i}=572644.5025.$$

甲乡每分含量:

$$苗米=\frac{a_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=\frac{19550.2483}{604883.2375}=0.0323206\text{ 石},$$

$$和买=\frac{b_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=\frac{10192.2656}{604883.2375}=0.0168500\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{c_1}{\Sigma\beta_iA_{1i}}=\frac{7457.6898}{604883.2375}=0.0123290\text{ 丈},$$

乙乡每分含量:

$$苗米=\frac{a_2}{\Sigma\beta_iA_{2i}}=\frac{17772.953}{489234.12}=0.0363281\text{ 石},$$

$$和买=\frac{b_2}{\Sigma\beta_iA_{2i}}=\frac{9265.696}{489234.12}=0.0189392\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{c_2}{\Sigma\beta_iA_{2i}}=\frac{6779.718}{489234.12}=0.0138578\text{ 丈}.$$

丙乡每分含量:

$$苗米=\frac{a_2}{\Sigma\beta_iA_{3i}}=\frac{17772.953}{585662.9}=0.0303467\text{ 石},$$

$$和买=\frac{b_2}{\Sigma\beta_iA_{3i}}=\frac{9265.696}{585662.9}=0.0158209\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{c_2}{\Sigma\beta_iA_{3i}}=\frac{6779.718}{585662.9}=0.0115761\text{ 丈}.$$

丁乡每分含量:

$$苗米=\frac{a_3}{\Sigma\beta_iA_{4i}}=\frac{16157.23}{470763.5673}=0.0343213\text{ 石},$$

$$和买=\frac{b_3}{\Sigma\beta_iA_{4i}}=\frac{8423.36}{470763.5673}=0.0178930\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{c_3}{\Sigma\beta_iA_{4i}}=\frac{6163.38}{470763.5673}=0.0130923\text{ 丈}.$$

戊乡每分含量:

$$苗米=\frac{a_3}{\Sigma\beta_iA_{5i}}=\frac{16157.23}{1050398.02}=0.0153820\text{ 石},$$

$$和买=\frac{b_3}{\Sigma\beta_iA_{5i}}=\frac{8423.36}{1050398.02}=0.0080192\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{c_3}{\Sigma\beta_iA_{5i}}=\frac{6163.38}{1050398.02}=0.0058677\text{ 丈}.$$

己乡每分含量:

$$苗米=\frac{a_3}{\Sigma\beta_i A_{6i}}=\frac{16157.23}{572644.5025}=0.0282151\text{石},$$

$$和买=\frac{b_3}{\Sigma\beta_i A_{6i}}=\frac{8423.36}{572644.5025}=0.0147096\text{丈},$$

$$夏税=\frac{c_3}{\Sigma\beta_i A_{6i}}=\frac{6163.38}{572644.5025}=0.0107630\text{丈}.$$

用 β_i 分乘每分含量，得各乡各等每亩等则：

甲乡各等每亩等则：

$$上等上田苗米=\frac{\beta_1 a_1}{\Sigma\beta_i A_{1i}}=10\times0.0323206=0.3232060\text{石}$$
$$=0.3232\text{石}=3\text{斗}2\text{升}3\text{合}2\text{勺},$$

$$和买=\frac{\beta_1 b_1}{\Sigma\beta_i A_{1i}}=10\times0.0168500=0.1685000\text{丈}$$
$$=0.169\text{丈}=1\text{尺}6\text{寸}9\text{分},$$

$$夏税=\frac{\beta_1 c_1}{\Sigma\beta_i A_{1i}}=10\times0.0123290=0.1232900\text{丈}$$
$$=0.123\text{丈}=1\text{尺}2\text{寸}3\text{分}.$$

$$中田苗米=\frac{\beta_2 a_1}{\Sigma\beta_i A_{1i}}=9\times0.0323206$$
$$=0.2908854\text{石}=0.2909\text{石},$$

$$和买=\frac{\beta_2 b_1}{\Sigma\beta_i A_{1i}}=9\times0.0168500$$
$$=0.1516500\text{丈}=0.152\text{丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_2 c_1}{\Sigma\beta_i A_{1i}}=9\times0.0123290$$
$$=0.1109610\text{丈}=0.111\text{丈}.$$

$$下田苗米=\frac{\beta_3 a_1}{\Sigma\beta_i A_{1i}}=8\times0.0323206$$
$$=0.2585648=0.2586\text{石},$$

$$和买=\frac{\beta_3 b_1}{\Sigma\beta_i A_{1i}}=8\times0.0168500$$
$$=0.1348000=0.135\text{丈},$$

夏税 $=\dfrac{\beta_3 c_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=8\times 0.0123290$

$=0.0986320=0.099$ 丈.

中等上田苗米 $=\dfrac{\beta_4 a_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=7\times 0.0323206$

$=0.2262442=0.2262$ 石,

和买 $=\dfrac{\beta_4 b_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=7\times 0.0168500$

$=0.1179500=0.118$ 丈,

夏税 $=\dfrac{\beta_4 c_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=7\times 0.0123290$

$=0.0863030=0.086$ 丈.

中田苗米 $=\dfrac{\beta_5 a_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=6\times 0.0323206$

$=0.1939236=0.1939$ 石,

和买 $=\dfrac{\beta_5 b_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=6\times 0.0168500$

$=0.1011000=0.101$ 丈,

夏税 $=\dfrac{\beta_5 c_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=6\times 0.0123290$

$=0.0739740=0.074$ 丈.

下田苗米 $=\dfrac{\beta_6 a_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=5\times 0.0323206$

$=0.1616030=0.1616$ 石,

和买 $=\dfrac{\beta_6 b_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=5\times 0.0168500$

$=0.0842500=0.084$ 丈,

夏税 $=\dfrac{\beta_6 c_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=5\times 0.0123290$

$=0.0616450=0.062$ 买.

下等上田苗米 $=\dfrac{\beta_7 a_1}{\sum \beta_i A_{1i}}=4\times 0.0323206$

$$=0.1292824=0.1293\text{石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_7 b_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=4\times0.0168500$$

$$=0.0674000=0.067\text{丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_7 c_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=4\times0.0123290$$

$$=0.0493160=0.049\text{丈}.$$

$$\text{中田苗米}=\frac{\beta_8 a_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=3\times0.0323206$$

$$=0.0969618=0.0970\text{石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_8 b_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=3\times0.0168500$$

$$=0.0505500=0.051\text{丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_8 c_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=3\times0.0123290$$

$$=0.0369870=0.037\text{丈}.$$

$$\text{下田苗米}=\frac{\beta_9 a_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=2\times0.0323206$$

$$=0.0646412=0.0646\text{石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_9 b_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=2\times0.0168500$$

$$=0.0337000=0.034\text{丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_9 c_1}{\sum\beta_i A_{1i}}=2\times0.0123290$$

$$=0.0246580=0.025\text{丈}.$$

乙乡各等每亩等则：

$$\text{上等上田苗米}=\frac{\beta_1 a_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=10\times0.0363281$$

$$=0.3632810=0.3633\text{石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_1 b_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=10\times0.0189392$$

$=0.1893920=0.189$ 丈，

夏税 $=\frac{\beta_1 c_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=10\times0.0138578$

$=0.1385780=0.139$ 丈.

中田苗米 $=\frac{\beta_2 a_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=9\times0.0363281$

$=0.3269529=0.3270$ 石，

和买 $=\frac{\beta_2 b_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=9\times0.0189392$

$=0.1704528=0.170$ 丈，

夏税 $=\frac{\beta_2 c_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=9\times0.0138578$

$=0.1247202=0.125$ 丈.

下田苗米 $=\frac{\beta_3 a_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=8\times0.0363281$

$=0.2906248=0.2906$ 石，

和买 $=\frac{\beta_3 b_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=8\times0.0189392$

$=0.1515136=0.152$ 丈，

夏税 $=\frac{\beta_3 c_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=8\times0.0138578$

$=0.1108624=0.111$ 丈.

中等上田苗米 $=\frac{\beta_4 a_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=7\times0.0363281$

$=0.2542967=0.2543$ 石，

和买 $=\frac{\beta_4 b_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=7\times0.0189392$

$=0.1325744=0.133$ 丈，

夏税 $=\frac{\beta_4 c_2}{\sum\beta_i A_{2i}}=7\times0.0138578$

$=0.0970046=0.097$ 丈.

$$中田苗米=\frac{\beta_5 a_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=6\times 0.0363281$$
$$=0.2179686=0.2180\ 石,$$

$$和买=\frac{\beta_5 b_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=6\times 0.0189392$$
$$=0.1136352=0.114\ 丈,$$

$$夏税=\frac{\beta_5 c_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=6\times 0.0138578$$
$$=0.0831468=0.083\ 丈.$$

$$下田苗米=\frac{\beta_6 a_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=5\times 0.0363281$$
$$=0.1816405=0.1816\ 石,$$

$$和买=\frac{\beta_6 b_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=5\times 0.0189392$$
$$=0.0946960=0.095\ 丈,$$

$$夏税=\frac{\beta_6 c_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=5\times 0.0138578$$
$$=0.0692890=0.069\ 丈.$$

$$下等上田苗米=\frac{\beta_7 a_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=4\times 0.0363281$$
$$=0.1453124=0.1453\ 石,$$

$$和买=\frac{\beta_7 b_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=4\times 0.0189392$$
$$=0.0757568=0.076\ 丈,$$

$$夏税=\frac{\beta_7 c_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=4\times 0.0138578$$
$$=0.0554312=0.055\ 丈.$$

$$中田苗米=\frac{\beta_8 a_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=3\times 0.0363281$$
$$=0.1089843=0.1090\ 石,$$

$$和买=\frac{\beta_8 b_2}{\sum \beta_i A_{2i}}=3\times 0.0189392$$

$$=0.0568176=0.057\text{ 丈,}$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_8 c_2}{\Sigma\beta_i A_{2i}}=3\times0.0138578$$

$$=0.0415734=0.042\text{ 丈.}$$

$$\text{下田苗米}=\frac{\beta_8 a_2}{\Sigma\beta_i A_{2i}}=2\times0.0363281$$

$$=0.0726562=0.0727\text{ 石,}$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_9 b_2}{\Sigma\beta_i A_{2i}}=2\times0.0189392$$

$$=0.0378784=0.038\text{ 丈,}$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_9 c_2}{\Sigma\beta_i A_{2i}}=2\times0.0138578$$

$$=0.0277156=0.028\text{ 丈.}$$

丙乡各等每亩等则:

$$\text{上等上田苗米}=\frac{\beta_1 a_2}{\Sigma\beta_i A_{3i}}=10\times0.0303467$$

$$=0.3034670=0.3035\text{ 石,}$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_1 b_2}{\Sigma\beta_i A_{3i}}=10\times0.0158209$$

$$=0.1582090=0.158\text{ 丈,}$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_1 c_2}{\Sigma\beta_i A_{3i}}=10\times0.0115761$$

$$=0.1157610=0.116\text{ 丈.}$$

$$\text{中田苗米}=\frac{\beta_2 a_2}{\Sigma\beta_i A_{3i}}=9\times0.0303467$$

$$=0.2731203=0.2731\text{ 石,}$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_2 b_2}{\Sigma\beta_i A_{3i}}=9\times0.0158209$$

$$=0.1423881=0.142\text{ 丈,}$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_2 c_2}{\Sigma\beta_i A_{3i}}=9\times0.0115761$$

$$=0.1041849=0.104\text{ 丈},$$

$$\text{下田苗米}=\frac{\beta_3 a_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=8\times0.0303467$$

$$=0.2427736=0.2428\text{ 石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_3 b_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=8\times0.0158209$$

$$=0.1265672=0.127\text{ 丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_3 c_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=8\times0.0115761$$

$$=0.0926088=0.093\text{ 丈}.$$

$$\text{中等上田苗米}=\frac{\beta_4 a_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=7\times0.0303467$$

$$=0.2124269=0.2124\text{ 石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_4 b_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=7\times0.0158209$$

$$=0.1107463=0.111\text{ 丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_4 c_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=7\times0.0115761$$

$$=0.0810327=0.081\text{ 丈}.$$

$$\text{中田苗米}=\frac{\beta_5 a_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=6\times0.0303467$$

$$=0.1820802=0.1821\text{ 石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_5 b_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=6\times0.0158209$$

$$=0.0949254=0.095\text{ 丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_5 c_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=6\times0.0115761$$

$$=0.0694566=0.069\text{ 丈}.$$

$$\text{下田苗米}=\frac{\beta_6 a_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=5\times0.0303467$$

$$=0.1517335=0.1517\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_6 b_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=5\times0.0158209$$

$$=0.0791045=0.079\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_6 c_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=5\times0.0115761$$

$$=0.0578805=0.058\text{ 丈}.$$

$$下等上田苗米=\frac{\beta_7 a_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=4\times0.0303467$$

$$=0.1213868=0.1214\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_7 b_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=4\times0.0158209$$

$$=0.0632836=0.063\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_7 c_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=4\times0.0115761$$

$$=0.0463044=0.046\text{ 丈}.$$

$$中田苗米=\frac{\beta_8 a_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=3\times0.0303467$$

$$=0.0910401=0.0910\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_8 b_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=3\times0.0158209$$

$$=0.0474627=0.047\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_8 c_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=3\times0.0115761$$

$$=0.0347283=0.035\text{ 丈}.$$

$$下田苗米=\frac{\beta_9 a_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=2\times0.0303467$$

$$=0.0606934=0.0607\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_9 b_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=2\times0.0158209$$

$$=0.0316418=0.032\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_9 c_2}{\sum\beta_i A_{3i}}=2\times0.0115761$$

$=0.0231522\approx0.023$ 丈.

丁乡各等每亩等则:

上等上田苗米 $=\frac{\beta_1 a_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=10\times0.0343213$

$=0.3432130\approx0.3432$ 石,

和买 $=\frac{\beta_1 b_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=10\times0.0178930$

$=0.1789300\approx0.179$ 丈,

夏税 $=\frac{\beta_1 c_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=10\times0.0130923$

$=0.1309230\approx0.131$ 丈.

中田苗米 $=\frac{\beta_2 a_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=9\times0.0343213$

$=0.3089117\approx0.3089$ 石,

和买 $=\frac{\beta_2 b_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=9\times0.0178930$

$=0.1610370\approx0.161$ 丈,

夏税 $=\frac{\beta_2 c_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=9\times0.0130923$

$=0.1178307\approx0.118$ 丈.

下田苗米 $=\frac{\beta_3 a_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=8\times0.0343213$

$=0.2745904\approx0.2746$ 石,

和买 $=\frac{\beta_3 b_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=8\times0.0178930$

$=0.1431440\approx0.143$ 丈,

夏税 $=\frac{\beta_3 c_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=8\times0.0130923$

$=0.1047384\approx0.105$ 丈.

中等上田苗米 $=\frac{\beta_4 a_3}{\Sigma\beta_i A_{4i}}=7\times0.0343213$

$=0.2402591=0.2403$ 石，

和买 $=\dfrac{\beta_4 b_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=7\times0.0178930$

$=0.1252510=0.125$ 丈，

夏税 $=\dfrac{\beta_4 c_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=7\times0.0130923$

$=0.0916461=0.092$ 丈.

中田苗米 $=\dfrac{\beta_5 a_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=6\times0.0343213$

$=0.2059278=0.2059$ 石，

和买 $=\dfrac{\beta_5 b_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=6\times0.0178930$

$=0.1073580=0.107$ 丈，

夏税 $=\dfrac{\beta_5 c_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=6\times0.0130923$

$=0.0785538=0.079$ 丈.

下田苗米 $=\dfrac{\beta_6 a_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=5\times0.0343213$

$=0.1716165=0.1716$ 石，

和买 $=\dfrac{\beta_6 b_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=5\times0.0178930$

$=0.0894650=0.089$ 丈，

夏税 $=\dfrac{\beta_6 c_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=5\times0.0130923$

$=0.0654615=0.065$ 丈.

下等上田苗米 $=\dfrac{\beta_7 a_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=4\times0.0343213$

$=0.1372952=0.1373$ 石，

和买 $=\dfrac{\beta_7 b_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=4\times0.0178930$

$=0.0715720=0.072$ 丈，

$$夏税=\frac{\beta_7 c_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=4\times0.0130923$$
$$=0.0523692=0.052\text{ 丈}.$$

$$中田苗米=\frac{\beta_8 a_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=3\times0.0343213$$
$$=0.1029739=0.1030\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_8 b_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=3\times0.0178930$$
$$=0.0536790=0.054\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_8 c_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=3\times0.0130923$$
$$=0.0392769=0.039\text{ 丈}.$$

$$下田苗米=\frac{\beta_9 a_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=2\times0.0343213$$
$$=0.0686426=0.0686\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_9 b_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=2\times0.0178930$$
$$=0.0357860=0.036\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_9 c_3}{\sum\beta_i A_{4i}}=2\times0.0130923$$
$$=0.0261846=0.026\text{ 丈}.$$

戊乡各等每亩等则：

$$上等上田苗米=\frac{\beta_1 a_3}{\sum\beta_i A_{5i}}=10\times0.0153820$$
$$=0.1538200=0.1538\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_1 b_3}{\sum\beta_i A_{5i}}=10\times0.0080192$$
$$=0.0801920=0.080\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_1 c_3}{\sum\beta_i A_{5i}}=10\times0.0058677$$
$$=0.0586770=0.059\text{ 丈}.$$

$$中田苗米=\frac{\beta_2 a_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=9\times0.0153820$$

$$=0.1384380=0.1384\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_2 b_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=9\times0.0080192$$

$$=0.0721728=0.072\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_2 c_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=9\times0.0058677$$

$$=0.0528093=0.053\text{ 丈}.$$

$$下田苗米=\frac{\beta_3 a_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=8\times0.0153820$$

$$=0.1230560=0.1231\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_3 b_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=8\times0.0080192$$

$$=0.0641536=0.064\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_3 c_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=8\times0.0058677$$

$$=0.0469416=0.047\text{ 丈}.$$

$$中等上田苗米=\frac{\beta_4 a_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=7\times0.0153820$$

$$=0.1076740=0.1077\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_4 b_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=7\times0.0080192$$

$$=0.0561344=0.056\text{ 丈},$$

$$夏税=\frac{\beta_4 c_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=7\times0.0058677$$

$$=0.0410739=0.041\text{ 丈}.$$

$$中田苗米=\frac{\beta_5 a_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=6\times0.0153820$$

$$=0.0922920=0.0923\text{ 石},$$

$$和买=\frac{\beta_5 b_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=6\times0.0080192$$

$$=0.0481152=0.048\text{ 丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_5 c_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=6\times0.0058677$$

$$=0.0352062=0.035\text{ 丈}.$$

$$\text{下田苗米}=\frac{\beta_6 a_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=5\times0.0153820$$

$$=0.0769100=0.0769\text{ 石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_6 b_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=5\times0.0080192$$

$$=0.0400960=0.040\text{ 丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_6 c_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=5\times0.0058677$$

$$=0.0293385=0.029\text{ 丈}.$$

$$\text{下等上田苗米}=\frac{\beta_7 a_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=4\times0.0153820$$

$$=0.0615280=0.0615\text{ 石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_7 b_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=4\times0.0080192$$

$$=0.0320768=0.032\text{ 丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_7 c_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=4\times0.0058677$$

$$=0.0234708=0.023\text{ 丈}.$$

$$\text{中田苗米}=\frac{\beta_8 a_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=3\times0.0153820$$

$$=0.0461460=0.0461\text{ 石},$$

$$\text{和买}=\frac{\beta_8 b_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=3\times0.0080192$$

$$=0.0240576=0.024\text{ 丈},$$

$$\text{夏税}=\frac{\beta_8 c_3}{\Sigma\beta_i A_{5i}}=3\times0.0058677$$

$$=0.0176031=0.018\text{ 丈}.$$

$$下田苗米=\frac{\beta_9 a_3}{\sum\beta_i A_{5i}}=2\times 0.0153820$$
$$=0.0307640=0.0308 石,$$
$$和买=\frac{\beta_9 b_3}{\sum\beta_i A_{5i}}=2\times 0.0080192$$
$$=0.0160384=0.016 丈,$$
$$夏税=\frac{\beta_9 c_3}{\sum\beta_i A_{5i}}=2\times 0.0058677$$
$$=0.0117354=0.012 丈.$$

己乡各等每亩等则:

$$上等上田苗米=\frac{\beta_1 a_3}{\sum\beta_i A_{6i}}=10\times 0.0282151$$
$$=0.2821510=0.2822 石,$$
$$和买=\frac{\beta_1 b_3}{\sum\beta_i A_{6i}}=10\times 0.0147096$$
$$=0.1470960=0.147 丈,$$
$$夏税=\frac{\beta_1 c_3}{\sum\beta_i A_{6i}}=10\times 0.0107630$$
$$=0.1076300=0.108 丈.$$
$$中田苗米=\frac{\beta_2 a_3}{\sum\beta_i A_{6i}}=9\times 0.0282151$$
$$=0.2539359=0.2539 石,$$
$$和买=\frac{\beta_2 b_3}{\sum\beta_i A_{6i}}=9\times 0.0147096$$
$$=0.1323864=0.132 丈,$$
$$夏税=\frac{\beta_2 c_3}{\sum\beta_i A_{6i}}=9\times 0.0107630$$
$$=0.0968670=0.097 丈.$$
$$下田苗米=\frac{\beta_3 a_3}{\sum\beta_i A_{6i}}=8\times 0.0282151$$
$$=0.2257208=0.2257 石,$$

$$和买=\frac{\beta_3 b_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=8\times 0.0147096$$

$$=0.1176768=0.118 丈,$$

$$夏税=\frac{\beta_3 c_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=8\times 0.0107630$$

$$=0.0861040=0.086 丈.$$

$$中等上田苗米=\frac{\beta_4 a_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=7\times 0.0282151$$

$$=0.1975057=0.1975 石,$$

$$和买=\frac{\beta_4 b_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=7\times 0.0147096$$

$$=0.1029672=0.103 丈,$$

$$夏税=\frac{\beta_4 c_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=7\times 0.0107630$$

$$=0.0753410=0.075 丈.$$

$$中田苗米=\frac{\beta_5 a_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=6\times 0.0282151$$

$$=0.1692906=0.1693 石,$$

$$和买=\frac{\beta_5 b_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=6\times 0.0147096$$

$$=0.0882576=0.088 丈,$$

$$夏税=\frac{\beta_5 c_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=6\times 0.0107630$$

$$=0.0645780=0.065 丈.$$

$$下田苗米=\frac{\beta_6 a_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=5\times 0.0282151$$

$$=0.1410755=0.1411 石,$$

$$和买=\frac{\beta_6 b_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=5\times 0.0147096$$

$$=0.0735480=0.074 丈,$$

$$夏税=\frac{\beta_6 c_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=5\times 0.0107630$$

$=0.0538150=0.054$ 丈.

下等上田苗米 $=\frac{\beta_7 a_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=4\times 0.0282151$

$=0.1128604=0.1129$ 石,

和买 $=\frac{\beta_7 b_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=4\times 0.0147096$

$=0.0588384=0.059$ 丈,

夏税 $=\frac{\beta_7 c_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=4\times 0.0107630$

$=0.0430520=0.043$ 丈.

中田苗米 $=\frac{\beta_8 a_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=3\times 0.0282151$

$=0.0846453=0.0846$ 石,

和买 $=\frac{\beta_8 b_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=3\times 0.0147096$

$=0.0441288=0.044$ 丈,

夏税 $=\frac{\beta_8 c_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=3\times 0.0107630$

$=0.0322890=0.032$ 丈.

下田苗米 $=\frac{\beta_9 a_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=2\times 0.0282151$

$=0.0564302=0.0564$ 石,

和买 $=\frac{\beta_9 b_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=2\times 0.0147096$

$=0.0294192=0.029$ 丈,

夏税 $=\frac{\beta_9 c_3}{\sum \beta_i A_{6i}}=2\times 0.0107630$

$=0.0215260=0.022$ 丈.

第十卷 凡 八 问

38. 围田租亩

问有兴复围田已成，共计三千二十一顷五十一亩一十五步. 分三等，其上等每亩起租六斗，中等四斗五升，下等四斗. 中田多上田弱半，不及下田太半，欲知三色田亩及各租几何?

答曰：上田，四百七十七顷八亩一十五步，

米，二万八千六百二十四石八斗三升七合五勺.

中田，六百三十六顷一十亩三角，

米，二万八千六百二十四石八斗三升七合五勺.

下田，一千九百八顷三十二亩一角，

米，七万六千三百三十二石九斗.

术曰：以衰分求之. 列母子求田率，副并为法，以共田为实，实如法而一，得一分之率. 以遍乘未并者，得三等田. 各以起租乘之，各得米.

【新释】 设共田为 A，上田为 A_1，中田为 A_2，下田为 A_3. 上田每亩起租 a_1 斗，中田每亩起租 a_2 斗，下田每亩起租 a_3 斗. 如果

$$A_1:A_2:A_3=\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3,$$

则按配分比例，而有

$$A_1=\frac{\alpha_1 A}{\sum\alpha} \qquad (\alpha)$$

$$A_2=\frac{\alpha_2 A}{\sum\alpha} \qquad (\beta)$$

$$A_3=\frac{\alpha_3 A}{\sum\alpha} \qquad (\gamma)$$

$$上田租米=a_1A_1 \qquad (\delta)$$

$$中田租米=a_2A_2 \qquad (\varepsilon)$$

$$下田租米=a_3A_3 \qquad (\zeta)$$

【原草】 草曰：置弱半母4为中率，子3为上率，以太半子2，减母3，余1，以乘中率4，只得4，为中泛．又以余1乘上率3，只得3，为上泛．次以太半母3，乘中泛4，得12，为下泛，副并三泛，得19，为泛．置田3021顷51亩，以亩法240通之，得72516240步，内子15步，得72516255步，为实．以法19除之，得3816645步，为一分之数．以上泛3因之，得11449935步，为上积．又以中泛4因(此处原有"之"字)一分数，得15266580步，为中积．又以下泛12乘一分数，得45799740步，为下积．其三积各以亩法240约之，为亩．其上田，得477顷8亩15步，其中田，得636顷10亩3角，其下田，得1908顷32亩1角．各以起租乘(原无"乘"字)三积为三实，其上积11449935步，乘上租6斗，得6869961石，为实，以亩法240除之，得28624石8斗3升7合5勺，为上田租．其中积15266580步，乘中租4斗5升，得6869961石为实，以亩法240除之，得28624石8斗3升7合5勺．其下积45799740步，乘下租4斗，得18319896石为实，以亩法240除之，得76332石9斗，为下田米．

【新释】 已知：$A_1:A_2:A_3=1-\frac{1}{4}:1:1+2$

$$=\frac{3}{4}:1:3=3:4:12,$$

$A=$3021顷51亩15步$=$72516255步，

$$\therefore\quad A_1=\frac{\alpha_1 A}{\sum\alpha}=\frac{3\times72516255}{19}=11449935\text{步}$$

$=$477顷8亩15步，

$$A_2=\frac{\alpha_2 A}{\sum\alpha}=\frac{4\times72516255}{19}=15266580\text{步}$$

$=$636顷10亩3角，

$$A_3=\frac{\alpha_3 A}{\sum\alpha}=\frac{12\times72516255}{19}=45799740\text{步}$$

$=$1908顷32亩1角．

$$上田租米=a_1A_1=\frac{6\times11449935}{240}$$

$=28624$石8斗3升7合5勺,

$$中田租米=a_2A_2=\frac{4.5\times15266580}{240}$$

$=28624$石8斗3升7合5勺,

$$下田租米=a_3A_3=\frac{4\times45799740}{240}$$

$=76332$石9斗.

39. 筑 埂 均 功

问四县共兴筑圩埂，长三十六里半，甲县出二千七百八十人，乙县出一千九百九十人，丙县出一千六百三十人，丁县出一千三百二十人，其甲县先差到一千五百四十四夫，丙县先差到九百六十五夫，欲知各合赋役埂长计几何？里法三百六十步。

答曰：甲先到人，筑二千六百二十八步．计七里一百八步．

丙先到人，筑一千六百四十二步半(原脱"半"字)．计四里二百二步半．

术曰：以商功求之．置里通步作尺，为积率．并诸县人数为均法，法与率，可约者约之，以科率各乘先到人为实，皆如法而一，各得先筑里步，为先赋埂长．其续到人合赋功，准此求之．

【新释】 设埂长为 L，甲县出夫 a_1 人，乙县 a_2 人，丙县 a_3 人，丁县 a_4 人，则每夫应筑

$$l=\frac{L}{a_1+a_2+a_3+a_4}=\frac{L}{\Sigma a} \qquad (\alpha)$$

又设甲县先差到 a_1' 人，丙县先差到 a_3' 人，则其先赋埂长为

$$甲县先赋埂长=\frac{a_1'L}{\Sigma a} \qquad (\beta)$$

$$丙县先赋埂长=\frac{a_3'L}{\Sigma a} \qquad (\gamma)$$

【原草】 草曰：置36里5分，以里法360步通之，得13140步，又以步法5尺乘之，得65700尺，为长率．并甲乙丙丁四县合科人，得7720，为均法．今法与率可求等，得20以约之，率得3285，法得386．以长率3285尺，乘甲县先到人1544夫，得5072040尺，为甲实，实如法386而一，得13140尺，以步法5尺约之，得2628步，为甲县先到人所筑积步．又以积率3285，乘丙县先到人965夫，得3170025尺，为丙实，实如法386而一，得8212尺5寸，以步法5尺约之，得1642步半，为丙县先到人所筑步．

【新释】 已知：$L=36.5$ 里 $=36.5\times 360$ 步 $=13140\times 5$ 尺 $=65700$ 尺，

$$\Sigma a=2780+1990+1630+1320=7720 \text{ 人},$$

$$\therefore\quad l=\frac{65700}{7720}=\frac{3285(\text{长率})}{386(\text{均法})}.$$

又知：$a_1'=1544$ 人，$a_3'=965$ 人，因得

$$\text{甲县先赋埂长}=\frac{a_1'L}{\Sigma a}=a_1'l=\frac{1544\times 3285}{386}=13140 \text{ 尺}$$

$$=\frac{13140}{5}\text{ 步}=2628 \text{ 步}=7 \text{ 里 } 108 \text{ 步},$$

$$\text{丙县先赋埂长}=\frac{a_3'L}{\Sigma a}=a_3'l=\frac{965\times 3285}{386}=8212.5 \text{ 尺}$$

$$=\frac{8212.5}{5}\text{ 步}=1642.5 \text{ 步}=4 \text{ 里 } 202.5 \text{ 步}.$$

40．宽减屯租

问屯租欲议宽减，仍听从夏麦，折纳分数．官牛种者，与减二分，私牛种者，与减四分．每岁租谷，以三分之一许夏折二麦，内四分大，六分小．折色每大麦三石，折小麦二石，小麦二石，折谷三石五斗．屯租旧额，官种一石，纳租五石，私种一石，纳租三石．今某州屯田，去年计官私种共九千七百八十二石，共合收租谷三万九千

五百八十六石．欲知官私种各数目元额今减合催成年夏麦秋谷租各几何？

答曰：请官种，五千一百二十石，

私出种，四千六百六十二石．

元租额，共三万九千五百八十六石．

官种，二万五千六百石，

私种，一万三千九百八十六石．

今减，一万七百一十四石四斗．

官种，五千一百二十石，

私种，五千五百九十四石四斗．

合催，二万八千八百七十一石六斗．

官种租，二万四百八十石．

一分折麦，计谷六千八百二十六石六斗六升． 零三分升之二．

四分折大麦，二千三百四十石五斗七升七分升之一， 系折谷二千七百三十石六斗六升三分升之二．

六分折小麦，二千三百四十石五斗七升七分升之一， 系折谷四千九十六石．

二分正色谷，一万三千六百五十三石三斗三升三分升之一．

私种租，八千三百九十一石六斗．

一分折麦，计谷二千七百九十七石二斗，

四分折大麦，九百五十九石四升， 系折谷一千一百一十八石八斗八升．

六分折小麦，九百五十九石四升， 系折谷一千六百七十八石三斗二升．

二分正色谷，五千五百九十四石四斗．

已上成年，共计收

夏折谷，大麦三千二百九十九石六斗一升七分升之一，

小麦三千二百九十九石六斗一升七分升之一，

秋正谷，一万九千二百四十七石七斗三升三分升之一．

术曰：以粟米求之，以互易入之．列共租共种，各以租种率数，依本色对之．先以各种率互乘诸租，验租数之少者，以乘共种，得数，复减共租，余为实．以二租数相减，余为官种法．实如法而一，得官种．以减共种，余为私种．各以租率对乘官私种，各得官私种所纳租．次以减分对乘各纳租，乃得各减数，以减所纳，余为合催租．乃分列之，先以总折分子乘之，各为实．并以总分母除之，各得折色正色数．次置折色数二位，用夏折大小分乘之，各得与每折诸率，如雁翅列，常以多一事者，相乘为实，以少一事者，相乘为法，各得所折大小麦，其正色数如故，为并本色，得成年夏折二麦秋收正谷．

【新释】　设共租为 A，共种为 B，官种为 B_1，租率为 b_1，私种为 B_2，租率为 b_2，则得

$$\text{请官种：} B_1=\frac{A-b_2B}{b_1-b_2} \qquad (\alpha)$$

$$\text{私出种：} B_2=B-B_1 \qquad (\beta)$$

$$\text{元租额：} A=b_1B_1+b_2B_2 \qquad (\gamma)$$

$$\text{官种租额}=b_1B_1 \qquad (\delta)$$

$$\text{私种租额}=b_2B_2 \qquad (\varepsilon)$$

次设官种减分为 a_1，私种减分为 a_2，因得

$$\text{今减}=\sum abB=a_1b_1B_1+a_2b_2B_2 \qquad (\zeta)$$

$$\text{官种减租}=a_1b_1B_1 \qquad (\eta)$$

$$\text{私种减租}=a_2b_2B_2 \qquad (\theta)$$

$$\text{合催}=\sum bB(1-a) \qquad (\iota)$$

$$\text{官种合催}=b_1B_1(1-a_1) \qquad (\kappa)$$

$$\text{私种合催}=b_2B_2(1-a_2) \qquad (\lambda)$$

复设每岁租谷折麦成数为 $\frac{p}{q}$，夏折二麦之比率为

$$大麦:小麦=r:s.$$

又若折色为大麦 t_1 石，折小麦 t_2 石，小麦 t_3 石，折谷 t_4 石．则得

$$官种折麦计谷=\frac{p}{q}b_1B_1(1-a_1) \qquad (\mu)$$

$$折大麦计谷=\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1) \qquad (\nu)$$

计折大麦时，用互易雁翅图：

t_1 —— t_2

t_3 —— t_4

$$\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1)$$

多一事者相乘为实，少一事者相乘为法．因得

$$计大麦=\frac{t_1t_3\cdot\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1)}{t_2t_4} \qquad (\nu')$$

$$折小麦计谷=\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1) \qquad (\xi)$$

计折小麦时，亦用互易雁翅图：

t_3 —— t_4

$$\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1)$$

因得

$$计小麦=\frac{t_3\cdot\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1)}{t_4} \qquad (\xi')$$

$$正色谷=\left(1-\frac{p}{q}\right)(b_1B_1-a_1b_1B_1) \qquad (o)$$

$$私种折麦计谷=\frac{p}{q}b_2B_2(1-a_2) \qquad (\pi)$$

$$折大麦计谷=\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2) \qquad (\rho)$$

$$计大麦=\frac{t_1t_3\cdot\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2)}{t_2t_4} \qquad (\rho')$$

$$折小麦计谷=\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2) \qquad (\sigma)$$

$$计小麦=\frac{t_3\cdot\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2)}{t_4} \qquad (\sigma')$$

$$正色谷=\left(1-\frac{p}{q}\right)(b_2B_2-a_2b_2B_2) \qquad (\tau)$$

成年共收:

$$夏折麦计谷=\frac{p}{q}\sum bB(1-a) \qquad (\nu)$$

$$折大麦=\frac{t_1t_3}{t_2t_4}\cdot\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot\sum bB(1-a) \qquad (\varphi)$$

$$折小麦=\frac{t_3}{t_4}\cdot\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot\sum bB(1-a) \qquad (\chi)$$

$$秋正谷=\left(1-\frac{p}{q}\right)\cdot\sum bB(1-a) \qquad (\psi)$$

【原草】 草曰:列共租 39586 石,并共种 9782 石.次各以官种一石纳租 5 石,私种一石纳租 3 石,各为率,对租种本色列之.先以种率各一石,互乘租数,只得共谷.次验租数率 3 石系少者,以乘共种 9782 石,得 29346 石,为种.复减共租,余 10240 石,为种实.以租率 3,减租率 5,余 2 石,系官租者,为官租法.除种实,得 5120 石,为官种.以减共种 9782,余 4662 石,为私出种.以官租率 5 石,私租率 3 石,各对乘官私种,得 25600 石,为官种所纳租.

得13986石，为私种所纳租．并之，得元额租．次列官牛种与减二分，私牛种与减四分，各对乘所纳租数，得5120石，为官种减租数．得5594石4斗，为私种减租数．并之，得10714石4斗，为今减数．乃以官种减租5120石，减官种租25600，余20480石，为合催．次以私种减5594石4斗，减私种租13986石，余8391石6斗，亦是合催租．乃以二等合催租，分列之．先以每岁三分之一，以子1减分母3，得2，乃以1及2皆为子，各乘合催租，其官种者一分租，得20480石，二分租，得40960石，其私种者一分租，得8391石6斗，二分租，得16783石2斗，并为实．此四实，并如母3而一，其官种一分，折得6826石6斗6升零3分升之2，及二分正色谷，得13653石3斗3升3分升之1．其私种一分折色，得2797石2斗，二分正色谷，得5594石4斗．次置官私种各一分折色数各二位，及用夏折四分大六分小对乘之，通系四位，乃并四六得10分约之，是并退一位，其官种四分大麦者，置折谷6826石6斗6升3分升之2，通分内子，得20480，列二位，上位以四分折之，得8192石，为大麦实．下位以六分折之，得12288石，为小麦实．次置私种折谷2797石2斗，列二位，上位以四分折之，得1118石8斗8升，为大麦实．下位以六分折之，得1678石3斗2升，为小麦实．其图如后：

次列折色，每大麦3石，折小麦2石，小麦2石，折谷3石5斗，为诸率．与大小麦实率四数，如雁翅列之．其六分折小麦，勿置大麦折率，有母者列母．

官大麦　谷 母 官小麦　谷 母	小麦 谷 小麦 谷	大麦 小麦

私大麦 𝍩𝍠𝍩𝍧𝍰𝍧谷	𝍡小麦 𝍢𝍭谷	𝍢大麦 𝍡小麦
私小麦 𝍩𝍥𝍯𝍧𝍫𝍡谷	𝍡小麦 𝍢𝍭谷	

官种者,先以大麦率3, 乘小麦率2, 得6, 又乘谷实8192石,得49152石,为大麦实. 次以小麦率2,乘谷率3石5斗, 得7石,又乘母,得21石,为法. 除实,得2340石5斗7升7分升之1, 为官种折大麦数. 仍以母3,约本实8192石, 得2730石6斗6升3分升之2,为所折上得大麦谷数. 次以小麦率2,乘谷实12288石,得24576石, 为小麦实. 乃以谷率3石5斗, 乘母3, 得10石5斗, 为法. 除实, 得2340石5斗7升7分升之1, 为官种折小麦谷. 仍以母3, 约本实12288石, 得4096石, 为所折上得小麦谷数.

私种者,先以大麦率3,乘小麦率2,得6,又乘谷数1118石8斗8升,得6713石2斗8升,为实. 乃以小麦率2, 乘谷率3石5斗,得7石,为法,除之, 得959石4升, 为私种折大麦数. 次以小麦率2, 乘谷率1678石3斗2升, 得3356石6斗4升, 为实. 以谷率3石5斗为法,除之, 得959石4升, 为私种谷折小麦数. 次以官种四分大麦2340石5斗7升7分升之1, 并私种四分大麦959石4升, 得3299石6斗1升7分升之1, 为成年夏折大麦数. 次以官种六分小麦2340石5斗7升7分升之1, 并私种六分小麦959石4升, 得3299石6斗1升7分升之1, 为成年夏折小麦数. 次以官种二分正色谷13653石3斗3升3分升之1, 并私种正色谷5594石4斗,得19247石7斗3升3分升之1. 合问.

【新释】 已知: $A=39586$石, $B=9782$石, $b_1=5$, $b_2=3$, 代入(α),(β)二式,得

$$B_1=\frac{39586-3\times 9782}{5-3}=\frac{10240}{2}=5120\text{ 石},$$

$$B_2=9782-5120=4662\text{ 石}.$$

把 b_1、b_2; B_1、B_2 的值代入(γ), (δ), (ε)各式，得

$$A=5\times 5120+3\times 4662=39586\text{ 石},$$

$$\text{官种租额}=b_1B_1=5\times 5120=25600\text{ 石},$$

$$\text{私种租额}=b_2B_2=3\times 4662=13986\text{ 石}.$$

次知: $a_1=20\%$, $a_2=40\%$, 代入(ζ)至(λ)各式，可得

$$\text{今减}=\sum abB=\frac{20}{100}\times 25600+\frac{40}{100}\times 13986$$

$$=5120+5594.4=10714.4\text{ 石},$$

$$\text{官种减租}=a_1b_1B_1=\frac{20}{100}\times 2560\ \ =5120\text{ 石},$$

$$\text{私种减租}=a_2b_2B_2=\frac{40}{100}\times 13986=5594.4\text{ 石}.$$

$$\text{合催}=\sum bB(1-a)=\frac{80}{100}\times 25600+\frac{60}{100}\times 13986$$

$$=28871.6\text{ 石},$$

$$\text{官种合催}=b_1B_1(1-a_1)=25600\times\frac{80}{100}=20480\text{ 石},$$

$$\text{私种合催}=b_2B_2(1-a_2)=13986\times\frac{60}{100}=8391.6\text{ 石}.$$

复知: $\frac{p}{q}=\frac{1}{3}$, $r:s=4:6$, $t_1=3$ 石, $t_2=2$ 石, $t_3=20$ 斗, $t_4=35$ 斗，代入(μ)至(τ)各式，得

$$\text{官种折麦计谷}=\frac{p}{q}\,b_1B_1(1-a_1)=\frac{1}{3}\times 20480$$

$$=6826\text{ 石 }6\text{ 斗 }6\frac{2}{3}\text{ 升},$$

$$\text{折大麦计谷}=\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\,b_1B_1(1-a_1)=\frac{4}{10}\times\frac{1}{3}\times 20480$$

$$=\frac{8192}{3}=2730\text{石}6\text{斗}6\frac{2}{3}\text{升},$$

计折大麦时，列互易雁翅图：

3——2
20——35
$\frac{8192}{3}$

因得

$$\text{计大麦}=\frac{t_1t_3\cdot\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1)}{t_2t_4}=\frac{3\times20\times\frac{8192}{3}}{2\times35}$$

$$=2340\text{石}5\text{斗}7\frac{1}{7}\text{升}.$$

$$\text{折小麦计谷}=\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1)$$

$$=\frac{6}{10}\times\frac{1}{3}\times20480=4096\text{石},$$

计折小麦时，亦列互易雁翅图：

20——35
$4096\left(=\frac{12288}{3}\right)$

因得

$$\text{计小麦}=\frac{t_3\cdot\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_1B_1(1-a_1)}{t_4}=\frac{20\times4096}{35}$$

$$=2340\text{石}5\text{斗}7\frac{1}{7}\text{升}.$$

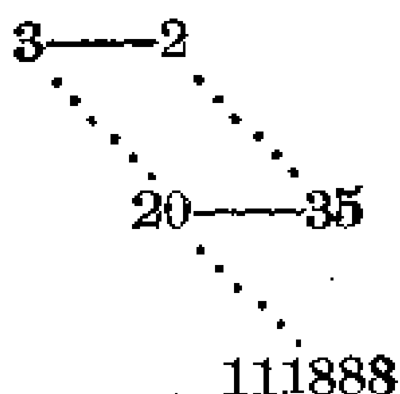
$$\text{正色谷}=\left(1-\frac{p}{q}\right)(b_1B_1-a_1b_1B_1)=\frac{2}{3}\times20480$$

$=13653$ 石 3 斗 $3\frac{1}{3}$ 升，

$$私种折麦计谷=\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2)=\frac{1}{3}\times 8391.6$$
$$=2797.2 石.$$

$$折大麦计谷=\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2)=\frac{4}{10}\times 2797.2$$
$$=1118.88 石,$$

计折大麦时，用雁翅图：

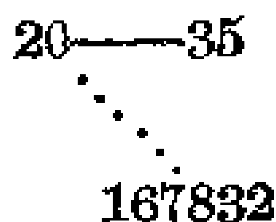


因得

$$计大麦=\frac{t_1t_3\cdot\frac{r}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2)}{t_2t_4}$$
$$=\frac{3\times 20\times 111888}{2\times 35}升=959.04 石.$$

$$折小麦计谷=\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2)=\frac{6}{10}\times 2797.2$$
$$=1678.32 石,$$

计折小麦时，亦用雁翅图：



因得

$$计小麦=\frac{t_3\cdot\frac{s}{r+s}\cdot\frac{p}{q}\cdot b_2B_2(1-a_2)}{t_4}$$

$$=\frac{20\times167832}{35}\text{升}=959.04\text{石}.$$

$$\text{正色谷}=\left(1-\frac{p}{q}\right)(b_2B_2-a_2b_2B_2)=\frac{2}{3}\times8391.6$$
$$=5594.4\text{石}.$$

由(ν)至(ψ)各式，得成年共收：

$$\text{夏折麦计谷}=\frac{p}{q}\sum bB(1-a)=\frac{1}{3}\times28871.6$$
$$=9623\text{石}8\text{斗}6\frac{2}{3}\text{升},$$

$$\text{折大麦}=2340\text{石}5\text{斗}7\frac{1}{7}\text{升}+959\text{石}4\text{升}$$
$$=3299\text{石}6\text{斗}1\frac{1}{7}\text{升},$$

$$\text{折小麦}=2340\text{石}5\text{斗}7\frac{1}{7}\text{升}+959\text{石}4\text{升}$$
$$=3299\text{石}6\text{斗}1\frac{1}{7}\text{升}.$$

$$\text{秋正谷}=\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum bB(1-a)=13653\text{石}3\text{斗}3\frac{1}{3}\text{升}$$
$$+5594\text{石}4\text{斗}=19247\text{石}7\text{斗}3\frac{1}{3}\text{升}.$$

41. 户田均宽

问州郡宽恤，近将某县下三等税户秋科余欠钱米，已与蠲放，共钱一千三百五十五贯七百六文，米五千二百七十二石一斗九升．其本县下等物力，计三万七千六百五十八贯五百文．今来官员，陈述本县多有乐输无欠之户，今蒙蠲放税尾，似反宽润顽输之户，于理未均，遂议将乐输三等户，于明年两税，与照昨来体例减免，契勘得三等无欠户物力二十二万八百一十五贯三百二十一文．欲知每百文合减免钱米，及共减各几何？

答曰：每物力一百文；

放钱三文六分，

放米一升四合．

明年两税放：

放钱七千九百四十九贯三百五十一文五分五厘六毫，

米三万九百一十四石一斗四升四合九勺四抄．

术曰：以粟米衰分求之．置元物力为法，除元放钱米，得每百文物力所放钱米率．以各率乘今来物力，各得钱米，为明年两税合放数．

【新释】 设蠲放共钱为 A，共米为 B，该县下等物力为 D，则每物力一百文：

$$放钱=\frac{100A}{D} \qquad (\alpha)$$

$$放米=\frac{100B}{D} \qquad (\beta)$$

又设无欠户物力为 E，则明年两税

$$放钱=\frac{AE}{D} \qquad (\gamma)$$

$$放米=\frac{BE}{D} \qquad (\delta)$$

【原草】 草曰：以元物力 37658 贯 500 文，为法，先除元放钱 1355 贯 706 文，定法佰文上得 1 文为商，除得 3 文 6 分，为物力佰文所放钱率．次除元放米 5272 石 1 斗 9 升，得 1 升 4 合，为物力佰文所放米率．以今三等户物力 220815 贯 321 文，遍乘所放钱米二率，得钱 7949 贯 351 文 5 分 5 厘 6 毫，得米 30914 石 1 斗 4 升 4 合 9 勺 4 抄，为明年两税合放数．

【新释】 已知：$A=1355706$ 文，$B=527219$ 升，$D=37658500$ 文，$E=220815321$ 文，代入(α)至(δ)各式，得

每物力一百文

$$放钱=\frac{100A}{D}=\frac{100\times1355706}{37658500}=3.6文=3文6分,$$

$$放米=\frac{100B}{D}=\frac{100\times527219}{37658500}=1.4升=1升4合.$$

明年两税

$$放钱=\frac{AE}{D}=\frac{1355706\times220815321}{37658500}$$

$$=7949贯351.556文,$$

$$放米=\frac{BE}{D}=\frac{527219\times220815321}{37658500}=30914.14494石.$$

42. 均科绵税

问县科绵,有五等户,共一万一千三十三户,共科绵八万八千三百三十七两六钱.上等一十二户,副等八十七户,中等四百六十四户,次等二千三十五户,下等八千四百三十五户.欲令上三等折半差,下二等比中等六四折差,科率求之,各户纳及各等几何?

答曰:上等一户,一百二十四两,

一十二户,计一千四百八十八两.

副等一户,六十二两,

八十七户,计五千三百九十四两.

中等一户,三十一两,

四百六十四户,计一万四千三百八十四两.

次等一户,一十二两四钱,

二千三十五户,计二万五千二百三十四两.

下等一户,四两九钱六分,

八千四百三十五户,计四万一千八百三十七两六钱.

术曰:列五等户数,先以四折下等数,加次等户.又以四折之,加中等户数.欲以半折之,加二等户.又以半折之,加上等户数.不折,便为法.除科绵,得上等一户之绵.复半之,为副等.又半

之，为中等．又四折之，为次等．又四折之，为下等．各一户绵，副各以户数乘之，各得五等共出绵，具图折之．

上
副
中
次
下
分

【新释】 设科绵共户为 A，共科绵为 B，上等 A_1 户，每户科绵 b_1 两，副等 A_2 户，每户 b_2 两，中等 A_3 户，每户 b_3 两，次等 A_4 户，每户 b_4 两，下等 A_5 户，每户 b_5 两．又设 $b_5:b_4=a_4$，$b_4:b_3=a_3$，$b_3:b_2=a_2$，$b_2:b_1=a_1$．则有

$$b_1=\frac{B}{A_1+a_1\{A_2+a_2[A_3+a_3(A_4+a_4A_5)]\}} \qquad (\alpha)$$

$$上等户共科绵=b_1A_1 \qquad (\beta)$$

$$b_2=a_1b_1 \qquad (\gamma)$$

$$副等户共科绵=b_2A_2 \qquad (\delta)$$

$$b_3=a_2b_2 \qquad (\varepsilon)$$

$$中等户共科绵=b_3A_3 \qquad (\zeta)$$

$$b_4=a_3b_3 \qquad (\eta)$$

$$次等户共科绵=b_4A_4 \qquad (\theta)$$

$$b_5=a_4b_4 \qquad (\iota)$$

$$下等户共科绵=b_5A_5 \qquad (\varkappa)$$

【原草】 草曰：先置下等户 8435，以四折之，得 3374．

上
副
中
次
下

乃以得数，并入次户 2035 内，得 5409 户讫.

上
副
中
〇次
〇
〇
分

又以四折次数 5409，得 2163 户 6 分.

上
副
中
次

乃以得次数，并入中户 464 内，共得 2627 户 6 分.

上
副
中
〇
〇
〇

次以五分折中数 2627 户 6 分，得数.

上
副
中

次以得数 1313 户 8 分，并副户 87，得 1400 户 8 分.

一Ⅱ上
一Ⅲ〇〇≐
副
〇
〇
〇
〇≣
分

又以五折副数 1400 户 8 分，得 700 户 4 分，既得数.

一Ⅱ上
ㄒ〇〇≡
副

乃以副数 700 户 4 分，并上户 12 户，得 712 户 4 分，不折，便以为法.

户
ㄒ一Ⅱ≡
为
法

累折至上等，共得 712 户 4 分，以为总法．乃置科绵 88337 两 6 钱为实，如法 712 户 4 分而一，得 124 两，为上等一户所出绵．以五折之，得 62 两，为（原脱“为”字）副等一户所出绵．又五折之，得 31 两，为中等一户所出绵．乃以四折之，得 12 两 4 钱，为次等一户所出绵．又以四折之，得 4 两 9 钱 6 分，为下等一户所出绵．乃以各等户数，各乘一户所出，即各得每等共数之绵.

【新释】 已知：$A=11033$ 户，$B=88337.6$ 两，$A_1=12$ 户，$A_2=87$ 户，$A_3=464$ 户，$A_4=2035$ 户，$A_5=8435$ 户．$a_1=a_2=0.5$，$a_3=a_4=0.4$．代入（α）至（$\varkappa$）各式，得

$$b_1=\frac{88337.6}{12+0.5\{87+0.5[464+0.4(2035+0.4\times 8435)]\}}$$

$$=\frac{88337.6}{12+0.5\{87+0.5[464+0.4\times 5409]\}}$$

$$=\frac{88337.6}{12+0.5\{87+0.5\times2627.6\}}=\frac{88337.6}{12+0.5\times1400.8}$$

$$=\frac{88337.6}{712.4}=124\text{ 两},$$

上等户共科绵 $=b_1A_1=124\times12=1488$ 两.

$b_2=a_1b_1=0.5\times124=62$ 两,

副等户共科绵 $=b_2A_2=62\times87=5394$ 两.

$b_3=a_2b_2=0.5\times62=31$ 两,

中等户共科绵 $=b_3A_3=31\times464=14384$ 两.

$b_4=a_3b_3=0.4\times31=12.4$ 两,

次等户共科绵 $=b_4A_4=12.4\times2035=25234$ 两.

$b_5=a_4b_4=0.4\times12.4=4.96$ 两,

下等户共科绵 $=b_5A_5=4.96\times8435$

$=41837.6$ 两.

43. 户 税 移 割

问某县,据甲称: 本户田地,元纳苗三十五石七斗,和买本色,一十一匹二丈二尺九寸四分八厘七毫五丝,折帛,二十七匹二寸一分三厘七毫五丝,䌷绢折帛,八匹三丈九尺七寸三分九厘,䌷绢本色,二十匹二丈八尺九寸三分九厘. 已将田四百七亩,出与乙,五百一十六亩,出与丙讫. 乞移割本户所出田上税赋,归并乙丙两户税纳. 会到乙元有田三百七十五亩,丙元有田四百六十三亩(原误为"四百三十六亩"),并系本乡本等,每亩苗三升五合,税一尺一寸五分,物力一贯二百. 本等地䌷,一尺三寸四分,物力九百. 物力三十二贯,敷和买一匹,内三分本色,七分折帛. 夏税,七分本色,三分折帛. 䌷,五分本色,五分折帛. 并绢䌷,欲知甲田地及甲乙丙分割合纳苗米和买夏税折帛本色畸零各几何?

答曰: 甲元有田一千二十亩,

地,一十一亩二角四十八步.

甲:今有田九十七亩,

苗米,三石三斗九升五合,

夏税折帛,三丈三尺四寸六分五厘,

本色,一匹,

畸零,三丈八尺八分五厘,

物力,一百一十六贯四百文.

地,一十一亩二角四十八步,

税䌷折帛,七尺八寸三分九厘,

税䌷畸零,七尺八寸三分九厘,

物力,一十贯五百三十文.

田地共物力,一百二十六贯九百三十文,

和买折帛,二匹三丈一尺六分三厘七毫五丝,

本色,一匹,

畸零,七尺五寸九分八厘七毫五丝.

乙今有田,七百八十二亩,

苗米,二十七石三斗七升,

夏税折帛,六匹二丈九尺七寸九分,

本色,一十五匹,

畸零,二丈九尺五寸一分,

物力,九百三十八贯四百文.

和买折帛,二十匹二丈一尺一寸,

本色,八匹,

畸零,三丈一尺九寸.

丙今有田九百七十九亩,

苗米,三十四石二斗六升五合,

夏税折帛,八匹一丈七尺七寸五分五厘,

本色,一十九匹,

畸零，二丈八尺九分五厘，

物力，一千一百七十四贯八百文.

和买折帛，二十五匹二丈七尺九寸五分，

本色，一十一匹，

畸零，五寸五分.

术曰：以粟米及衰分求之．置甲元纳米，为实，以每亩苗为法，除之，得甲元有田．以乘每亩税，得田绢．次以甲绢本色折帛并之，内减田绢，余为地绸．以每绸约之，得甲元有地．次以甲出田，并乙丙元有田，各得三户今有田地．各以等则乘之，各得物力苗税．次以每匹物力率，约各户共物力，得和买．副之，三分因之，退位，为和本，七分因之，退位，为和折．夏税反其分而因之，退之，绸以半之，并入税，各得.

【新释】 设本乡本等田，每亩苗米为 α_1，夏税为 α_2，物力为 α_3．本等地，每亩绸为 β_1，物力为 β_2．且物力每 k 贯敷和买一匹，内本色 t_1 分，折帛 $1-t_1$ 分．夏税，本色 t_2 分，折帛 $1-t_2$ 分．绸，本色 t_3 分，折帛 $1-t_3$ 分．又设甲元有田数为 A，出与乙田数为 A_1、出与丙田数为 A_2，乙元有田数为 B，丙元有田数为 C．复设甲元纳苗米为 a，元纳绸绢折帛为 b_1，元绸绢本色为 b_2．则可得

甲元有田：$A=\dfrac{a}{\alpha_1}$ $\quad(\alpha)$

甲元有田绢：$D_1=\alpha_2 A$ $\quad(\beta)$

甲元有地绸：$D_2=b_1+b_2-D_1$ $\quad(\gamma)$

甲元有地：$D=\dfrac{b_1+b_2-D_1}{\beta_1}$ $\quad(\delta)$

甲今有田：$A'=A-A_1-A_2$ $\quad(\varepsilon)$

甲今有地：$D'=D$ $\quad(\zeta)$

乙今有田：$B'=B+A_1$ $\quad(\eta)$

丙今有田：$C'=C+A_2$ $\quad(\theta)$

把今有田地各以等则乘之，各得物力苗税，列表于下：

等则		甲		乙: B'	丙: C'
		A'	D'		
苗米: α_1		$\alpha_1 A'$		$\alpha_1 B'$	$\alpha_1 C'$
夏税 α_2	折帛: $1-t_2$	$\alpha_2(1-t_2)A'$		$\alpha_2(1-t_2)B'$	$\alpha_2(1-t_2)C'$
	本色: t_2	$\alpha_2 t_2 A'$		$\alpha_2 t_2 B'$	$\alpha_2 t_2 C'$
物力: α_3; β_2		$\alpha_3 A'$	$\beta_2 D'$	$\alpha_3 B'$	$\alpha_3 C'$
地绸 β_1	折帛: $1-t_3$		$\beta_1(1-t_3)D'$		
	本色: t_3		$\beta_1 t_3 D'$		
和买 $\frac{1}{k}$	折帛: $1-t_1$	$\frac{1}{k}(1-t_1)(\alpha_3 A'+\beta_2 D')$		$\frac{1}{k}(1-t_1)\alpha_3 B'$	$\frac{1}{k}(1-t_1)\alpha_3 C'$
	本色: t_1	$\frac{1}{k}t_1(\alpha_3 A'+\beta_2 D')$		$\frac{1}{k}t_1\alpha_3 B'$	$\frac{1}{k}t_1\alpha_3 C'$

【原草】 草曰：置甲元纳米 35 石 7 斗，为实．每亩以苗 3 升 5 合，为法，除之，得 1020 亩，为甲元有田．以乘每亩税 1 尺 1 寸 5 分，得 117 丈 3 尺，为绢积尺．次以甲元纳绢绸折帛 8 匹 3 丈 9 尺 7 寸 3 分 9 厘，并绸绢本色 20 匹 2 丈 8 尺 9 寸 3 分 9 厘，得 29 匹 2 丈 8 尺 6 寸 7 分 8 厘，以匹法 4 丈通匹数，内零丈，得 118 丈 8 尺 6 寸 7 分 8 厘，内减田绢积丈尺 117 丈 3 尺，余 1 丈 5 尺 6 寸 7 分 8 厘，为甲地绸．以每亩绸 1 尺 3 寸 4 分纳之，得 11 亩 7 分．其亩下 7 分倍之，得 140，身下加二，得 168 步，以 60 步纳之，得 2 角零 48 步，通得 11 亩 2 角 48 步，为甲元有地．乃以甲所出 407 亩及 516 亩，并得 923 亩，减元有 1020 亩，余 97 亩，为甲今有田并元地．次以甲出田 407 亩，并乙元有田 375 亩，共得 782 亩，为乙今有田．次以甲所出田 516 亩，并丙元有田 463 亩，共得 979 亩，为丙今有田．各列三户今有田地数于右行，副之，先以每亩苗 3 升 5 合，遍乘右行，甲得 3 石 3 斗 9 升 5 合，乙得 27 石 3 斗 7 升，丙得 34 石 2 斗 6 升 5 合，为本户苗米．次以每亩税 1 尺 1 寸 5 分，

遍乘左副行，甲得11丈1尺5寸5分，乙得89丈9尺3寸，丙得112丈5尺8寸5分，各为丈积．各列二位，皆以三分因上位，七分因下位，并退一位，即是自下三七折之，又各以4丈，约丈积成匹，其甲得3丈3尺4寸6分5厘，为夏税折帛，又得1匹3丈8尺8分5厘，为夏税本色．其乙得6匹2丈9尺7寸9分，为夏税折帛，又得15匹2丈9尺5寸1分，为夏税本色，其丙得8匹1丈7尺7寸5分5厘，为夏税折帛，得19匹2丈8尺9分5厘，为夏税本色．次以田力1贯200，遍乘右副行，并以地物力乘甲元地及绸，甲得116贯400，乙得938贯400，丙得1174贯800，各为田物力．其甲，又置11亩7分，以乘地绸1尺3寸4分，得1丈5尺6寸7分8厘，为甲地绸．半之，得7尺8寸3分9厘，各为折绸本色．又以甲地乘物力900，得10贯530，为甲地物力．并田物力116贯400，共得126贯930文，为甲物力．列甲乙丙三户共物力，各为实．皆以物力和买率32贯为法，除之，甲得3匹9分6厘6毫5丝6忽2微5尘，乙得29匹3分2厘5毫，丙得36匹7分1厘2毫5丝，各为和买率．亦各列二位，各以七三折之，其上位七折者，为和买折帛，下位三折者，为和买本色．折讫，其甲得2匹7分7厘6毫5丝9忽3微7尘5沙，为和买折帛率，又得1匹1分8厘9毫9丝6忽8微7尘5沙，为和买本色率．乙得20匹5分2厘7毫5丝，为和买折帛率，又得8匹7分9厘7毫5丝，为和买本色率．丙得25匹6分9厘8毫7丝5忽，为和买折帛率，又得11匹1厘3毫7丝5忽，为和买本色率．各率除端匹外，乃以匹下分毫，皆以4因之，收为丈尺寸分．甲得和买折帛2匹3丈1尺6分3厘7毫5丝，本色1匹7尺5寸9分8厘7毫5丝，乙得和买折帛20匹2丈1尺1寸，本色8匹3丈1尺9寸，丙得和买折帛25匹2丈7尺9寸5分，本色11匹5寸5分，为各户和买数匹分本色下畸零数．合问．

【新释】　已知：$a=35.7$石，$b_1=8$匹3.9739丈，$b_2=20$匹

2.8939 丈，$\alpha_1=3.5$ 升，$\alpha_2=1.15$ 尺，$\alpha_3=1200$ 文. $\beta_1=1.34$ 尺，$\beta_2=900$ 文. $k=32$ 贯，$t_1=\frac{3}{10}$，$t_2=\frac{7}{10}$，$t_3=\frac{5}{10}$. $A_1=407$ 亩，$A_2=516$ 亩，$B=375$ 亩，$C=463$ 亩. 代入(α)至(θ)各式，得

甲元有田：$A=\frac{35.7\text{石}}{3.5\text{升}}=\frac{35700}{35}=1020$ 亩，

甲元有田绢：$D_1=1.15$ 尺$\times 1020=1173$ 尺

$=117$ 丈 3 尺，

甲元有地绸：$D_2=35.9739+82.8939-117.3$

$=1.5678$ 丈，

甲元有地：$D=\frac{1.5678\text{丈}}{1.34\text{尺}}=\frac{15678}{1340}=11.7$ 亩

$=11$ 亩 2 角 48 步.

甲今有田：$A'=1020-407-516=97$ 亩，

甲今有地：$D'=D=11$ 亩 2 角 48 步，

乙今有田：$B'=375+407=782$ 亩，

丙今有田：$C'=463+516=979$ 亩.

将今有田和物力苗税各率对乘之，各得物力苗税如下表：

各　率	田　亩		
	甲：97 亩	乙：782 亩	丙：979 亩
	物力苗税		
苗米：35 合	3395 合	27370 合	34265 合
夏税：115 分	11155 分	89930 分	112585 分
折帛：$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$	3346.5 分	26979 分	33775.5 分
本色：$\frac{7}{10}$	7808.5 分	62951 分	78809.5 分
物力：1200 文	116400 文	938400 文	1174800 文

甲地绸$=11.7\times 1.34=15.678$ 尺$=1.5678$ 丈，

$$折帛=15.678\times\frac{5}{10}=7.839 尺=0.7839 丈,$$

$$本色=15.678\times\frac{5}{10}=7.839 尺=0.7839 丈.$$

甲地物力$=11.7\times900=10530$ 文,

甲田地共物力$=10530+116400=126930$ 文.

次将各物力及和买率,求和买如下表:

和买率	物力 甲: 126930 文	乙: 938400 文	丙: 1174800 文
	和买		
和买: $\frac{1}{32000}$	3.9665625 匹	29.325 匹	36.7125 匹
折帛: $1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$	2.77659375 匹	20.5275 匹	25.69875 匹
本色: $\frac{3}{10}$	1.18996875 匹	8.7975 匹	11.01375 匹

因得

甲和买折帛=2.77659375 匹= 2 匹 3.106375 丈,

甲和买本色=1.18996875 匹=1 匹 0.759875 丈,

即本色: 1 匹,

畸零: 7 尺 5 寸 9 分 8 厘 7 毫 5 丝.

乙和买折帛=20.5275 匹=20 匹 2.11 丈,

乙和买本色=8.7975 匹=8 匹 3.19 丈,

即本色: 8 匹,

畸零: 3 丈 1 尺 9 寸.

丙和买折帛=25.69875 匹=25 匹 2.795 丈,

丙和买本色=11.01375 匹=11 匹 0.055 丈,

即本色: 11 匹,

畸零:5 寸 5 分.

44. 移运均劳分郡县分科均

问今起夫移运边饷，于某郡交纳，合起一万二千夫．甲州有三县，上县力，五十七万三千二百五十九贯五百文，至输所，九百二十五里．中县力，五十万四千九百八十三贯七百八十文，至输所，六百五十二里．下县力，四十九万八千七百六十贯九百五十文，至输所，四百六十五里．乙军倚郭，一县五乡，仁乡力，一十二万八千三百七十一贯九百八十文，至输所，七百六里．义乡力，一十一万九千四百七十二贯六百文，至输所，七百九十五里．礼乡力，一十万八千四百六十三贯五十文，至输所，七百九十里．智乡力，八万四千二百三十六贯二百八十五文，至输所，七百四十九里．信乡力，九千三百四十五贯一百六十文，至输所，八百四里．欲知以物力多寡道里远近均运之，令劳费等，各合科夫几何？

答曰：甲州上县，差二千四百三十夫，

中县，差三千三十七夫，

下县，差四千二百六夫．

乙军郭县

仁乡，七百一十三夫，

义乡，五百八十九夫，

礼乡，五百三十八夫，

智乡，四百四十一夫，

信乡，四十六夫．

术曰：以均输求之．置各县及乡力，皆如里而一，不尽者约之，复通分内子，互乘之，或就母迁退之，各得变力．可约约之，为定力．副并为法，以合起夫，遍乘未并定力，各得为实．并如前法而一，各得夫，其余分辈之．

【新释】　设各县乡物力为 A_1, A_2, …, A_8, 各至输所里数为 D_1, D_2, …, D_8, 各合科夫数为 N_1, N_2, …N_8, 合起夫为 N, 则得

$$N_i=\frac{N\cdot A_i/D_i}{\sum_{k=1}^{8}A_k/D_k}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)\qquad(\alpha)$$

【原草】 草曰：置甲州三县及乙军五乡物力里数，作八行列之．具图于后：

仁乡	下县	中县	上县
文 128371980 里 706 力 181830 定力 [illegible]	文 498760950 里 465 力 1072604 子 6 母 31 定力 [illegible]	文 504983780 里 652 力 774515 定力 [illegible]	文 573259500 里 925 力 619740 定力 [illegible]
信乡	智乡	礼乡	义乡
文 [illegible] 里 [illegible] 力 [illegible] 子 [illegible] 母 [illegible] 信 [illegible] 定力 [illegible]	文 84236285 里 749 力 112465 智 [illegible] 定力 [illegible]	文 108463050 里 790 力 137295 礼 [illegible] 定力 [illegible]	文 119472600 里 795 力 150280 义 [illegible] 定力 [illegible]

草曰：置上县力 573259 贯 500 文，如 925 里而一，得力 619740．置中县 504983 贯 780 文，如 652 里而一，得力 774515．置下县 498760 贯 950，如 465 里而一，得力 1072604，不尽 90 文，与法求等，得 15，约之，得 31 分之 6．置仁乡 128371 贯 980，如 706 里而一，得力 181830．置义乡 119472 贯 600 文，如 795 里而一，得力 150280．置礼乡 108463 贯 50 文，如 790 而一，得力 137295．置智乡 84236 贯 285 文，如 749 里而一，得力 112465．置

信乡 9345 贯 160 文，如 804 里而一，得力 11623，不尽 268 文，与法求等，得 268，约为 3 分之 1. 其下县信乡二处带母子者，各以母互遍乘八处，所得毕，二处各内本子，上得 57635820，中得 72029895，下得 99752190，仁得 16910190，义得 13976040，礼得 12768435，智得 10459245，信得 1080970，已上为三县五乡变力率. 可约者复求等约之，求得 5，故俱以 5 约之，上得 11527164，中得 14405979，下得 19950438，仁得 3382038，义得 2795208，礼得 2553687，智得 2091849，信得 216194，已上并为定力. 副并八处定力，得 56922557，为法，以合起 12000 夫，遍乘定力讫. 上得 138325968000 为实，中得 172871748000 为中实，下得 239405256000 为下实，仁得 40584456000 为仁实，义得 33542496000 为义实，礼得 30644244000 为礼实，智得 25102188000 为智实，信得 2594328000 为信实. 已上八实，皆如前法而一，上县得 2430 夫，不尽 4154490，*半归中县下县.* 中县得 3036 夫，不尽 54864948，*半为一夫.* 下县得 4205 夫，不尽 45903815，*半为一夫.* 仁乡得 712 夫，不尽 55595416，*半为一夫.* 义乡得 589 夫，不尽 15109927，*半归仁乡.* 礼乡得 538 夫，不尽 19908334，*半归智乡信乡.* 智乡得 440 夫，不尽 56262920，*半为一夫.* 信乡得 45 夫，不尽 32812935，*半为一夫.* 合问.

【新释】 已知：$N=12000$ 夫，$A_1=573259500$ 文，$A_2=504983780$ 文，$A_3=498760950$ 文，$A_4=128371980$ 文，$A_5=119472600$ 文，$A_6=108463050$ 文，$A_7=84236285$ 文，$A_8=9345160$ 文. $D_1=925$ 里，$D_2=652$ 里，$D_3=465$ 里，$D_4=706$ 里，$D_5=795$ 里，$D_6=790$ 里，$D_7=749$ 里，$D_8=804$ 里. 于是

$$A_1/D_1=\frac{573259500}{925}=619740,$$

$$A_2/D_2=\frac{504983780}{652}=774515,$$

$$A_3/D_3=\frac{498760950}{465}=1072604\frac{6}{31},$$

$$A_4/D_4=\frac{128371980}{706}=181830,$$

$$A_5/D_5=\frac{119472600}{795}=150280,$$

$$A_6/D_6=\frac{108463050}{790}=137295,$$

$$A_7/D_7=\frac{84236285}{749}=112465,$$

$$A_8/D_8=\frac{9345160}{804}=11623\frac{1}{3}.$$

通分纳子后得变力如次:

$$\text{上县变力}=3\times31\times\frac{A_1}{D_1}=57635820,$$

$$\text{中县变力}=3\times31\times\frac{A_2}{D_2}=72029895,$$

$$\text{下县变力}=3\times31\times\frac{A_3}{D_3}=99752190,$$

$$\text{仁乡变力}=3\times31\times\frac{A_4}{D_4}=16910190,$$

$$\text{义乡变力}=3\times31\times\frac{A_5}{D_5}=13976040,$$

$$\text{礼乡变力}=3\times31\times\frac{A_6}{D_6}=12768435,$$

$$\text{智乡变力}=3\times31\times\frac{A_7}{D_7}=10459245,$$

$$\text{信乡变力}=3\times31\times\frac{A_8}{D_8}=1080970.$$

各以总等5约之,得各县乡定力:

$$\text{上县定力}=\frac{57635820}{5}=11527164,$$

$$中县定力=\frac{72029895}{5}=14405979,$$

$$下县定力=\frac{99752190}{5}=19950438,$$

$$仁乡定力=\frac{16910190}{5}=3382038,$$

$$义乡定力=\frac{13976040}{5}=2795208,$$

$$礼乡定力=\frac{12768435}{5}=2553687,$$

$$智乡定力=\frac{10459245}{5}=2091849,$$

$$信乡定力=\frac{1080970}{5}=216194.$$

定力总和=56922557.

由(α)式, 可得

$$N_1=\frac{N\cdot A_1/D_1}{\sum A/D}=\frac{12000\times 11527164}{56922557}=2430^{+}夫,$$

$$N_2=\frac{N\cdot A_2/D_2}{\sum A/D}=\frac{12000\times 14405979}{56922557}=3037^{-}夫,$$

$$N_3=\frac{N\cdot A_3/D_3}{\sum A/D}=\frac{12000\times 19950438}{56922557}=4206^{-}夫,$$

$$N_4=\frac{N\cdot A_4/D_4}{\sum A/D}=\frac{12000\times 3382038}{56922557}=713^{-}夫,$$

$$N_5=\frac{N\cdot A_5/D_5}{\sum A/D}=\frac{12000\times 2795208}{56922557}=589^{+}夫,$$

$$N_6=\frac{N\cdot A_6/D_6}{\sum A/D}=\frac{12000\times 2553687}{56922557}=538^{+}夫,$$

$$N_7=\frac{N\cdot A_7/D_7}{\sum A/D}=\frac{12000\times 2091849}{56922557}=441^{-}夫,$$

$$N_8=\frac{N\cdot A_8/D_8}{\sum A/D}=\frac{12000\times 216194}{56922557}=46^{-}夫.$$

45. 均定劝分

问欲劝粜赈济，据甲民物力亩步排定．共计一百六十二户，作九等，上等三户，第二等五户，第三等七户，第四等八户，第五等十三户，第六等二十一户，第七等二十六户，第八等三十四户，第九等四十五户，今先劝谕第一等上户愿粜五千石，第九等户原粜二百石，欲知各等抛差石数，并总认米数各几何？

答曰：总认米二十三万七千六百石．

上等一户，米五千石，

三户，计一万五千石．

二等一户，米四千四百石，

五户，计二万二千石．

三等一户，米三千八百石，

七户，计二万六千六百石．

四等一户，米三千二百石，

八户，计二万五千六百石．

五等一户，米二千六百石，

一十三户，计三万三千八百石．

六等一户，米二千石，

二十一户，计四万二千石．

七等一户，米一千四百石，

二十六户，计三万六千四百石．

八等一户，米八百石，

三十四户，计二万七千二百石．

九等一户，米二百石，

四十五户，计九千石．

术曰：以衰分求之．置上下户米，减余，为实．列等数，减一，余为法．除之，得抛差石数，以差累减上等米，各得诸等米．以各

等户数乘之，并之，为总数.

【新释】 设等数为 n，各等各有 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 户. 各粜 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 石. 其各等抛差石数为 d，总数为 A，则得

$$d=\frac{b_1-b_n}{n-1} \quad (\alpha)$$

$$b_2=b_1-d \quad (\beta)$$

$$b_3=b_2-d \quad (\gamma)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n=b_{n-1}-d \quad (\delta)$$

$$A=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad (\varepsilon)$$

【原草】 草曰：置上等户米5000石，减下等户200石，余4800石，为实. 以9等减1，余8，为法. 除实，得600石，为每等抛差. 用减上等，余4400石，为二等米. 又减600，得3800石，为三等米. 又减600，得3200石，为四等米. 又减600，得2600石，为五等米. 又减600，得2000石，为六等米. 又减600，得1400石，为七等米. 又减600，得800石，为八等米. 又减600，得200石，为九等米. 又各乘户数，并之，得总认米石数237600石.

【新释】 已知：$n=9$，$b_1=5000$ 石，$b_9=200$ 石. 因得

$$d=\frac{5000-200}{9-1}=\frac{4800}{8}=600 \text{ 石},$$

$$b_2=5000-600=4400 \text{ 石},$$

$$b_3=4400-600=3800 \text{ 石},$$

$$b_4=3800-600=3200 \text{ 石},$$

$$b_5=3200-600=2600 \text{ 石},$$

$$b_6=2600-600=2000 \text{ 石},$$

$$b_7=2000-600=1400 \text{ 石},$$

$$b_8=1400-600=800 \text{ 石},$$

$$b_9=800-600=200 \text{ 石}.$$

又知，$a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=7$，$a_4=8$，$a_5=13$，$a_6=21$，$a_7=26$，$a_8=34$，$a_9=45$．因得

$$a_1b_1=3\times5000=15000\text{ 石},$$
$$a_2b_2=5\times4400=22000\text{ 石},$$
$$a_3b_3=7\times3800=26600\text{ 石},$$
$$a_4b_4=8\times3200=25600\text{ 石},$$
$$a_5b_5=13\times2600=33800\text{ 石},$$
$$a_6b_6=21\times2000=42000\text{ 石},$$
$$a_7b_7=26\times1400=36400\text{ 石},$$
$$a_8b_8=34\times800=27200\text{ 石},$$
$$a_9b_9=45\times200=9000\text{ 石}.$$

而

$$A=\sum_{i=1}^{9}a_ib_i=15000+22000+26600+25600+33800+42000+36400+27200+9000=237600\text{ 石}.$$

第六章　钱　谷　类

在"折解轻赍"中，可以看出当时弊制的复杂情形.

"囷积量容"一问，应用了圆锥台的体积公式：

$$v=\frac{1}{12}\pi H(d`+d'+dd')$$

和角锥台的体积公式：

$$v=\frac{1}{3}H(B+B'+\sqrt{BB'}).$$

式中 H 为高，d，d' 为上下直径 B，B' 为上下底.

"推知粜数"一问，报道了当时交易市场征收粮食交易税的具体情况，而且很技巧地给出了该问的三次方程式.

"积仓知数"中，有常数"斛法二尺五寸"，即每石米的容积为 2.5 立方尺. 又"米谷粒分"一问，有"粟率五十"及"勺率三百粒"，即谷一石折合米五斗及米每勺为三百粒. 这些常数，都是具有现实意义的.

第十一卷　凡　三　问

46. 折 解 轻 赍

问有甲乙丙丁四郡，各合起上供银绢. 甲郡银三千二百两，每两二贯二百文足. 绢六万四千匹，每匹二贯文足. 去京一千里，每担一里，佣钱六文足. 其时旧会，每贯五十四文足. 乙郡银二千七百两，每两二贯三百文足. 绢四万九千二百匹，每匹二贯四百二十文足. 去京九百八十里，每担一里，佣钱四文二分. 旧会价，五十

九文足．丙郡银四千两，每两新会九贯三百文．绢七万三千六百匹，每匹新会一十贯三百文．去京二千里，每担一里，佣钱八十文，旧会．丁郡银二千六(原“六”误为“二”)百两，每两五十一贯文，旧会．绢三万二(原“二”误为“一”)千三十五匹，每匹五十八贯文，旧会．去京一千五百里，每担一里，佣钱一百文，旧会．诸郡银每五百两，绢每六十匹，新会每五千贯为担．欲并折新会，其时新会比旧会，一比五(原无“其时新会比旧会，一比五”二语，今据术补入)。均作三限起解，求各郡每限及本色元理折解实用宽余佣钱各新会几何？

答曰：甲郡合解五十万一百四十八贯一百四十八文．

初限，一十六万六千七百一十六贯四十九文，

次限，一十六万六千七百一十六贯四十九文，

末限，一十六万六千七百一十六贯五十文．

佣钱元理，二万三千八百四十五贯九百二十五文，二十七分文之二十五．

实用，二千二百二十二贯八百七十七文，二十七分文之二十一．

宽余，二万一千六百二十三贯四十八文，二十七分文之四．

乙郡合解四十二万四千六百五十七贯六百二十七文．

初限，一十四万一千五百五十二贯五百四十二文，

次限，一十四万一千五百五十二贯五百四十二文，

末限，一十四万一千五百五十二贯五百四十三文．

佣钱元理，一万一千五百一十六贯四百二十八文，五十九分文之二十八．

实用，一千一百八十五贯一十文，五十九分文之一十．

宽余，一万三百三十一贯四百一十八文，五十九分文之一十八．

丙郡合解七十九万五千二百八十贯文．

初限，二十六万五千九十三贯三百三十三文，

次限，三十六万五千九十三贯三百三十三文，

末限，二十六万五千九十三贯三百三十四文．

佣钱元理，三万九千五百九贯三百三十三文，三分文之一．

实用，五千八十九贯七百九十二文，

宽余，三万四千四百一十九贯五百四十一文，三分文之一．

丁郡合解三十九万八千一百二十六贯文．

初限，一十三万二千七百八贯六百六十六文，

次限，一十三万二千七百八贯六百六十六文，

末限，一十三万二千七百八贯六百六十八文．

佣钱元理，一万六千一百七十三贯五百文，

实用，二千三百八十八贯七百五十六文，

宽余，一万三千七百八十四贯七百四十四文．

术曰：以均输求之，置各郡银绢，乘各价，并之，归足元，展足为旧会．次以五约旧会，为新会，各得合解钱．以限数除之，得每限钱．不尽，并归末限．次置里数，乘每里佣价，为率，以率乘元银及元绢，各为佣实．以每担银绢率，各为法．实如法而一，不满者亦为担，并之，为元理佣钱．次以率，乘合解钱，为实，乃以钱物每担率为法，实如法而一，各得实用佣钱．以减元理佣钱，余为宽余佣钱．

问　数　图

丁	丙	乙	甲
𝍪𝍥〇〇郡银两	𝍬〇〇〇郡银两	𝍪𝍦〇〇郡银两	𝍫𝍡〇〇郡银两
𝍨𝍩〇〇〇银价旧会文	𝍭𝍢〇〇银价新会文	𝍪𝍢〇〇银价足文	𝍪𝍡〇〇银价足文

绢匹	绢价	里	佣钱	旧会陌
⊤≣○○○ 绢匹	=○○○ 绢价足文	━○○○ 里	⊤ 佣足钱	≣‖‖‖‖ 旧会陌
‖‖‖≣‖○○ 绢匹	=≣=○ 绢价足文	‖‖‖≐○ 里	‖‖‖‖= 佣足钱	≣‖‖‖ 旧会陌
⊤⊤≡⊤○○ 绢匹	|○|||○○ 绢价新会文	=○○○ 里	≐○ 佣钱旧会文	
|||=○≡|||| 绢匹	||||≐○○○ 绢价旧会文	━||||○○ 里	━○○ 佣钱旧会文	

【新释】　设甲郡银两为 A_1，每两足价为 a_1，乙郡银两为 A_2，每两足价为 a_2，丙郡银两为 A_3，每两新会价为 a_3''，丁郡银两为 A_4，每两旧会价为 a_4'．复设甲郡绢匹为 B_1，每匹足价为 b_1，乙郡绢匹为 B_2，每匹足价为 b_2，丙郡绢匹为 B_3，每匹新会价为 b_3''，丁郡绢匹为 B_4，每匹旧会价为 b_4'．次设甲郡旧会每贯足钱为 c_1，乙郡旧会每贯足钱为 c_2，且

$$\text{新会}:\text{旧会}=1:5.$$

又设甲郡合解为 D_1，乙郡合解为 D_2，丙郡合解为 D_3，丁郡合解为 D_4．则得

$$D_1=(a_1A_1+b_1B_1)/5c_1 \qquad (\alpha_1)$$

$$D_2=(a_2A_2+b_2B_2)/5c_2 \qquad (\alpha_2)$$

$$D_3 = a_3'' A_3 + b_3'' B_3 \qquad (\alpha_3)$$

$$D_4 = (a_1' A_4 + b_1' B_4)/5 \qquad (\alpha_4)$$

复设限数为 n，则每限 E 为

$$E_i = D_i / n \qquad (\beta)$$

式中若有不尽情形，则将余文并归末限.

次设甲郡去京里数为 L_1，乙郡里数为 L_2，丙郡里数为 L_3，丁郡里数为 L_4. 甲郡每里佣足钱为 l_1，乙郡佣足钱为 l_2，丙郡佣钱旧会为 l_3'，丁郡佣钱旧会为 l_4'. 又设每担银率为 r，绢率为 r'，钱率为 r''. 则元理佣钱 G 为

$$G_i = l_i'' L_i \left(\frac{A_i}{r} + \frac{B_i}{r'} \right) \qquad (\gamma)$$

式中 l_i'' 为新会. 实用佣钱 H 为

$$H_i = \frac{l_i'' L_i D_i}{r''} \qquad (\delta)$$

宽余佣钱 K 为

$$K_i = G_i - H_i \qquad (\varepsilon)$$

而共解数 S 为

$$S_i = D_i + K_i \qquad (\zeta)$$

【原草】 草曰：置各郡银绢，乘各价，甲郡银 3200 两，乙郡银 2700 两，丙郡银 4000 两，丁郡银 2600 两，于右行. 甲郡银两价 2 贯 200 足，乙郡银两价 2 贯 300 足，丙郡银两价 9 贯 300 新会，丁郡银两价 51 贯旧会，于左行. 对乘之，甲得 7040 贯足，乙得 6210 贯足，丙得 37200 贯新会，丁得 132600 贯旧会. 又列置各郡绢，甲 64000 匹，乙 49200 匹，丙 73600 匹，丁 32035 匹，于右行. 各郡绢匹价，甲 2 贯足，乙 2 贯 420 足，丙新会 10 贯 300，丁 58 贯旧会，于左行. 亦对乘之，甲得 128000 贯足，乙得 119064 贯足，丙得 758080 贯新会，丁得 1858030 贯旧会. 乃并各郡银绢价，甲共 135040 贯足，乙共 125274 贯足，丙共 795280 贯新，丁共 1990630

贯旧．甲以旧会价 54 文展足钱，得 2500740 贯 740 文．乙以旧会价 59 文展足钱，得 2123288 贯 136 文．丙已系新会，丁系旧会、今甲乙丁，俱以 5 除之，皆为新会．甲得 500148 贯 148 文，乙得 424657 贯 627 文，丙得 795280 贯文，丁得 398126 贯，各为合解钱．以限数 3 除之，甲得 166716 贯 49 文，为初限次限数，不尽 1 文，增入次限数内，共得 166716 贯 50 文，为末限数．乙得 141552 贯 542 文，为初限次限数，不尽 1 文，增入，得 141552 贯 543 文，为末限数．丙得 265093 贯 333 文，为初限次限数，不尽 1 文，增入，得 265093 贯 334 文，为末限数．丁得 132708 贯 666 文，为初限次限数，不尽 2 文，增入，得 132708 贯 668 文，为末限数．各以里数乘佣钱，各为率．置甲郡 1000 里，乙郡 980 里，丙郡 2000 里，丁郡 1500 里，于右行．次置甲郡佣钱 6 文足，乙郡佣钱 4 文 2 分足，丙郡佣钱 80 文旧会，丁郡佣钱 100 旧会，于左行．与右行对乘之，甲得率 6 贯足，乙得率 4 贯 116 足，丙得率 160 贯旧，丁得率 150 贯旧，于右行．以率乘元银数，各为佣实．次置甲元银 3200 两，乙银 2700 两(原脱"两"字)，丙银 4000 两，丁银 2600 两，于左行．与右行对乘之，甲得 19200 贯，乙得 11113 贯 200 文，丙得 64 万贯旧，丁得 39 万贯旧，皆银佣，置于右行．次置甲乙丙丁，每担银率 500 两，为法．遍除右行，甲得 38 贯 400 足，乙得 22 贯 226 文 4 分足，丙得 1280 贯旧，丁得 780 贯旧，为各郡银佣钱，列寄别行．次置甲元绢 64000 匹，乙绢 49200 匹，丙绢 73600 匹，丁绢 32035 匹，为左行．与右行各率对乘之，甲得 384000 贯足，乙得 202507 贯 200 足丙得 11776000 贯旧，丁得 4805250 贯旧(原脱"旧"字)，各为绢佣实．次以四郡每担绢率 60 匹为法，除之，甲得 6400 贯足，乙得 3375 贯 120 足，丙得 196266 贯 666 文 3 分文之 2 旧，丁得 80087 贯 500 旧，为各郡绢佣钱．并入寄别行，甲得 6438 贯 400 足，乙得 3397 贯 346 文 4 分足，丙得 197546 贯 666 文 3 分文之 2 旧，丁得 80867 贯 500 旧，列右行．其甲旧会价 54 文，5 因之，得 270 文足．

乙旧会价 59 文，亦 5 因之，得 295 文．丙以 5，丁亦以 5 于左行，以对约右行，皆为新会．甲得 23845 贯 925 文 27 分文之 25，乙得 11516 贯 428 文 59 分文之 28，丙得 39509 贯 333 文 3 分文之 1，丁得 16173 贯 500 文，并新会，系四郡元佣价钱．次以元四郡率，对乘四郡合解新会，各为实率．其甲 6 贯足，乘甲合解钱 500148 贯 148 文，得 3000888888 贯．其乙率 4 贯 116 足，乘乙合解钱 424657 贯 627 文，得 1747890792 贯 732 文足．其丙率 160 贯旧，乘丙合解钱 795280 贯，得 12724480 万贯旧．其丁率 150 贯旧，乘丁合解钱 398126 贯，得 5971890 万贯旧，各为实．乃以每担率 5000 贯为法而一，甲得 600 贯 177 文足，不尽 3888 贯文．乙得 349 贯 578 文足，不尽 792 贯 732 文．丙得 25448 贯 960 文旧会，丁得 11943 贯 780 文旧，为各郡实用．甲以 270 文约，乙以 295 文约．丁丙皆 5 约，为新会．甲 2222 贯 877 文，不尽 210 文．乙 1185 贯 10 文，不尽 50 文丙 5089 贯 792 文，丁 2388 贯 756 文，各减元理，甲余 21623 贯 48 文，乙余 10331 贯 418 文，丙余 34419 贯 541 文，丁余 13784 贯 744 文．合问．

𝍠𝍯𝍧〇〇〇〇〇〇 文足	𝍪〇〇〇 足文	甲绢匹 𝍥𝍢〇〇〇
𝍠𝍩𝍧〇𝍥𝍬〇〇〇 文足	𝍯𝍣𝍯〇 足文	乙绢匹 𝍣𝍰𝍡〇〇
𝍦𝍱𝍧〇𝍧〇〇〇〇 新会	𝍠〇𝍢〇〇 新会文	丙绢匹 𝍦𝍰𝍥〇〇

右行		左行	
丁绢匹 Ⅱ亠〇亖Ⅲ	两行亦	Ⅲ亖〇〇〇 旧会文 对乘、	一Ⅲ亖Ⅲ〇Ⅲ〇〇〇〇 旧会
右行		左行	得四郡绢价，并前寄行

右行	两行对乘	左行	
甲银两 亖Ⅱ〇〇		二Ⅱ〇〇 足	丌〇Ⅲ〇〇〇〇 足文
乙银两 二丌〇〇		二Ⅲ〇〇 足	丅二Ⅰ〇〇〇〇 足文
丙银两 亖〇〇〇		亖Ⅲ〇〇 新会	亖丌亠〇〇〇〇〇 新会文
丁银两 二丅〇〇		Ⅲ一〇〇〇 旧会	Ⅰ二Ⅱ⊥〇〇〇〇〇 旧会文
右行	两行对乘	左行	得四郡银价，为寄行

两行银价。

ㄒ○Ⅲ○○○○○ 足文

ㄒ〓〡○○○○ 足文

≡ㄒ〓○○○○○ 新会文

〡≡‖⊥○○○○○ 旧会文

并之。绢价。

〡〓Ⅲ○○○○○○○ 足文

〡一Ⅲ○⊤≡○○○ 足文

ㄒⅢ≣○Ⅲ○○○○ 新会文

一Ⅲ≣Ⅲ○Ⅲ○○○○ 旧会文

甲乙皆以会陌约之。

甲共○ 足文≡旧会陌 〡〓Ⅲ○Ⅲ○○○

乙共○ 足文Ⅲ旧会陌 〡〓Ⅲ〓ㄒ≡○○

丙共○ 新会 ㄒ≡○〓Ⅲ○○○

丁共○ 旧会 一Ⅲ≡○⊥‖○○○

甲乙丁并皆约之。

○甲共旧会 〓○○⊥Ⅲ○ㄒ≡

⊤乙共旧会 〓〡〓‖〓Ⅲ≡〡≡

○丙共旧会 ㄒ≡○〓Ⅲ○○○

○丁共旧会 一Ⅲ≡○⊥‖○○○

合解钱

甲 〦〇〇一〨丨〤〣〧文

乙 〢二〨丄〇〤丅二〧文

丙 〧〤〨二〧〇〇〇〇文

丁 〣〤〧一〢丄〇〇〇文

限各解以新部约之三会会

甲 丨丄丅〤丄〇〇〤〧文 不尽文丨

乙 丨〣丨〦〇二〨〣〢文 不尽丨

丙 〢丄〇〇〧〣〢〣〢文 不尽丨

丁 丨〣〢〤〇〤丅丄丅文 不尽〢

限得钱三

去京 甲〇〇〇一里 乙〇〤〧里 丙〇〇〇二里 丁〇〨一里 右行

两行对乘

佣钱 丅文足 二〣文足 〇〤文旧会 〇〇丨文旧会 左行

促各率 〇〇〇丄文足 丅一丨〣文足 〇〇〇〇丅一文旧会 〇〇〇〇〨一文旧会 右行

两行对乘

甲〇〇〢〣银两 乙〇〇〧二银两 丙〇〇〇〨银两 丁〇〇丅二银两 左行

银甫宗〇〇〇〇〇二三一 文足

〇〇二三一丨一 文足

〇〇〇〇〇〇〇三丅 文旧会

〇〇〇〇〇〇〇三‖ 文旧会

银两〇〇三 法

银甫钱甲〇〇‖三‖ 文足

乙三丅二‖二‖ 文足

丙〇〇〇〇Ⅲ二丨 文旧会

丁〇〇〇〇Ⅲ二 文旧会

寄别行。

佣率〇〇〇丄 文足

丅丄丨三 文足

〇〇〇〇丅一 文旧

〇〇〇〇三一 文旧

两行封乘。

甲绢〇〇〇三丅

乙绢〇〇‖三‖

丙绢〇丅三丅

丁绢三〇二‖

绢佣实〇〇〇〇〇〇‖三‖ 文足

〇〇‖二〇三‖〇‖ 文足

〇〇〇〇〇〇丅二丅一丨 文旧

〇〇〇〇三二〇〇Ⅲ三 文旧

匹〇丄 法

绢價錢○文足　○文足　文旧　子母　○文旧

右行

两行并之

錢價錢○文足　文足　○文旧　○文旧

別行

○○文足　文足　文旧　子母　○○文旧

右行

左行除右行

○文　文

左行

今欲变右行足钱旧会，皆为新会．故以 5 遍乘甲陌 54，得 270．乙陌 59，得 295．

（算筹图式：左图——右行：各实甲……；……文足；……文旧；……。左行：……。左行除右行。）

（算筹图式：中图——甲……文足，……不尽；乙……文足，……不尽；丙……文旧；丁……文旧。其甲乙有不尽者，不满担，计佣钱，所得各约为新会。）

（算筹图式：右图——术曰：如法而除，至一文乃止。实用……文，……亿；……文，……亿；……文旧，……亿；……文旧，……亿；……文，每担法。）

寄余合并为共合解、共解钱

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 合解

并新会

[illegible] 子 [illegible] 母

[illegible] 子 [illegible] 母

[illegible] 子 [illegible] 母

[illegible] 子 [illegible] 母 共解钱

丁 [illegible] 文

丙 [illegible] 文

乙 [illegible] 文

甲 [illegible] 文 元间并新会文

皆系新会

[illegible] 丁文

[illegible] 丙文

[illegible] 乙文

[illegible] 甲文 合解钱

两行对乘

[illegible] 文旧

[illegible] 文旧

[illegible] 文足

[illegible] 文足 得条

	甲	乙	丙	丁	
欠用偶数	甲 [illegible] 子 [illegible] 母 [illegible]	乙 [illegible] 文 [illegible] 子 [illegible] 母 [illegible]	丙 [illegible] 文 [illegible]	丁 [illegible] 文 [illegible]	用并新会实用数。
元理偶数	甲 [illegible] 子 [illegible] 母 [illegible]	乙 [illegible] 子 [illegible] 母 [illegible]	丙 [illegible] 子 [illegible] 母 [illegible]	丁 [illegible]	
宽余并用新会数	甲 [illegible]	乙 [illegible]	丙 [illegible] 子 [illegible] 母 [illegible]	丁 [illegible]	不尽，皆等约之来
宽余	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

【新释】 已知：$A_1=3200$ 两，$A_2=2700$ 两，$A_3=4000$ 两，$A_4=2600$ 两．$a_1=2200$ 文，$a_2=2300$ 文，$a_3''=9300$ 文，$a_4'=51000$ 文．$B_1=64000$ 匹，$B_2=49200$ 匹，$B_3=73600$ 匹，$B_4=32035$ 匹．$b_1=2000$ 文，$b_2=2420$ 文，$b_3''=10300$ 文，$b_4'=58000$ 文．$c_1=54$ 文，$c_2=59$ 文．代入(α_i)各式，得

$$D_1=(2200\times3200+2000\times64000)/(5\times54)$$
$$=(7040000+128000000)/270$$
$$=500148\frac{40}{270}\text{贯}=500148\text{贯}148\frac{4}{27}\text{文}$$
$$=500148\text{贯}148\text{文},$$
$$D_2=(2300\times2700+2420\times49200)/(5\times59)$$
$$=(6210000+119064000)/295$$
$$=424657\frac{185}{295}\text{贯}=424657\text{贯}627\frac{35}{295}\text{文}$$
$$=424657\text{贯}627\text{文},$$
$$D_3=9300\times4000+10300\times73600$$
$$=37200000+758080000=795280\text{贯文},$$
$$D_4=(51000\times2600+58000\times32035)/5$$
$$=(132600000+1858030000)/5$$
$$=1990630000/5=398126\text{贯文}.$$

复知限数 $n=3$，由(β)式，得

$$E_1=D_1/3=500148148/3=166716\text{贯}49\text{文},$$

余 1 文并入末限.

$$E_2=D_2/3=424657627/3=141552\text{贯}542\text{文},$$

余 1 文并入末限.

$$E_3=D_3/3=795280000/3=265093\text{贯}333\text{文},$$

余 1 文并入末限.

$$E_4=D_4/3=398126000/3=132708\text{贯}666\text{文},$$

余 2 文并入末限.

又知：$L_1=1000$ 里，$L_2=980$ 里，$L_3=2000$ 里，$L_4=1500$ 里. $l_1=6$ 文，$l_2=4.2$ 文，$l_3'=80$ 文，$l_4'=100$ 文. $r=500$ 两，$r'=60$ 匹，$r''=5000$ 贯. 代入(γ)式，得元理佣钱：

$$G_1=l_1''L_1\left(\frac{A_1}{r}+\frac{B_1}{r'}\right)=\frac{6}{270}\times1000\left(\frac{3200}{500}+\frac{64000}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{270}\left(\frac{6000\times3200}{500}+\frac{6000\times64000}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{270}(38400+6400000)$$

$$=6438400/270=23845\text{ 贯 }925\frac{25}{27}\text{ 文},$$

$$G_2=l_2''L_2\left(\frac{A_2}{r}+\frac{B_2}{r'}\right)=\frac{4.2}{295}\times980\left(\frac{2700}{500}+\frac{49200}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{295}\left(\frac{4116\times2700}{500}+\frac{4116\times49200}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{295}(22226.4+3375120)$$

$$=3397346.4/295=11516\text{ 贯 }428\frac{28}{59}\text{ 文},$$

$$G_3=l_3''L_3\left(\frac{A_3}{r}+\frac{B_3}{r'}\right)=\frac{80}{5}\times2000\left(\frac{4000}{500}+\frac{73600}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{160000\times4000}{500}+\frac{160000\times73600}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(1280000+196266666\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{197546666\frac{2}{3}}{5}=39509\text{ 贯 }333\frac{1}{3}\text{ 文},$$

$$G_4=l_4''L_4\left(\frac{A_4}{r}+\frac{B_4}{r'}\right)=\frac{100}{5}\times1500\left(\frac{2600}{500}+\frac{32035}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{150000\times2600}{500}+\frac{150000\times32035}{60}\right)$$

$$=\frac{1}{5}(780000+80087500)$$

$$=80867500/5=16173 \text{ 贯 } 500 \text{ 文.}$$

由(δ)式，得实用佣钱：

$$H_1=\frac{l_1'' L_1 D_1}{r''}=\frac{6000\times 500148148}{270\times 5000000}$$

$$=\frac{3000888888000}{270\times 5000000}=\frac{600177}{270}$$

$$=2222 \text{ 贯 } 877\frac{7}{9} \text{ 文,}$$

$$H_2=\frac{l_2'' L_2 D_2}{r''}=\frac{4116\times 424657627}{295\times 5000000}$$

$$=\frac{1747890792732}{295\times 5000000}=349578/295$$

$$=1185 \text{ 贯 } 10\frac{10}{59} \text{ 文,}$$

$$H_3=\frac{l_3'' L_3 D_3}{r''}=\frac{160000+95280000}{5\times 5000000}$$

$$=\frac{127214800000000}{5\times 5000000}=25448960/5$$

$$=5089 \text{ 贯 } 792 \text{ 文,}$$

$$H_4=\frac{l_4'' L_4 D_4}{r''}=\frac{150000\times 398126000}{5\times 5000000}$$

$$=\frac{59718900000000}{5\times 5000000}=11943780/5$$

$$=2388 \text{ 贯 } 756 \text{ 文.}$$

由(ε)式，得宽余佣钱：

$$K_1=G_1-H_1=23845925\frac{25}{27}-2222877\frac{21}{27}$$

$$=21623 \text{ 贯 } 48\frac{4}{27} \text{ 文,}$$

$$K_2=G_2-H_2=11516428\frac{28}{59}-1185010\frac{10}{59}$$

$$=10331\text{贯}418\frac{18}{59}\text{文},$$

$$K_3=G_3-H_3=39509333\frac{1}{3}-5089792$$

$$=34419\text{贯}541\frac{1}{3}\text{文},$$

$$K_4=G_4-H_4=16173500-2388756$$

$$=13784\text{贯}744\text{文}.$$

由(ζ)式，得共解钱：

$$S_1=D_1+K_1=500148148+21623048\frac{4}{27}$$

$$=521771\text{贯}196\frac{4}{27}\text{文},$$

$$S_2=D_2+K_2=424657627+10331418\frac{18}{59}$$

$$=434989\text{贯}45\frac{18}{59}\text{文},$$

$$S_3=D_3+K_3=795280000+34419541\frac{1}{3}$$

$$=829699\text{贯}541\frac{1}{3}\text{文},$$

$$S_4=D_4+K_4=398126000+13784744$$

$$=411910\text{贯}744\text{文}.$$

【注 1】 原术称"不满者亦为担"，与原草图中所述"不满担不计"，稍有出入．

【注 2】 原草图中最后有"宽余合并合解，为共解钱"．其中宽余部分的运费并未计算．

47、算回运费

问有江西水运米一十二万三千四百石，元系至镇江交卸，计水程二千一百三十里，每石水脚钱一贯二百文，十七界会子．今截上

件米，就池州安顿．池州至镇江八百八十里，欲收回不该水脚钱几何？

【注】 界，与也．会子，宋代钞名．“十七界会子”，即在所付脚钱中，给予十七界会子也．显然此语与问题之计算无关．

答曰：收回钱六万一千一百七十八贯五百九十一文．

术曰：以粟米互易求之．置池州至镇江里数，乘水脚钱，得数又乘运米，为实．以元至镇江水程为法，除实，得收回钱．

【新释】 设江西至镇江里数为 L，运米总石数为 A，每石水脚钱为 a，又池州至镇江里数为 L'，则应收回水脚钱 B 为

$$B=\frac{L'aA}{L} \tag{α}$$

【原草】 草曰：置池州至镇江 880 里，乘每石水脚钱 1 贯 200，得 1056 贯文．又乘运米 123400 石，得 130310400 贯文，为实．以元至镇江水程 2130 里，为法．除实，得 61178 贯 591 文，为收回钱数．

【新释】 已知：$L=2130$ 里，$A=123400$ 石，$a=1200$ 文，$L'=880$ 里．代入 (α) 式，得收回水脚钱

$$B=\frac{880\times1200\times123400}{2130}=\frac{130310400000}{2130}$$

$=61178$ 贯 591 文．

48、课籴贵贱

问差人五路和籴．据甲浙西平江府石价三十五贯文，一百三十五合，至镇江水脚钱，每石九百文．安吉州石价二十九贯五百文，一百一十合，至镇江水脚钱，每石一贯二百文．江西隆兴府石价二十八贯一百文，一百一十五合，至建康水脚钱，每石一贯七百文．吉州石价二十五贯八百五十文，一百二十合，至建康水脚钱，每石二贯九百文．湖广潭州石价二十七贯三百文，一百一十八合，

至鄂州水脚钱，每石二贯一百文．其钱并十七界官会，其米，并用文思院斛，交量细数．欲皆以官斛计石钱，相比贵贱几何？文思院斛，每斗八十三合．

答曰：文思院斛，石钱：

安吉州，二十三贯一百六十四文，一十一分文之六．

平江府，二十二贯七十一文，二十七分文之二十三．

隆兴府，二十一贯五百七文，二十三分文之一十九．

潭州，二十贯六百七十九文，五十九分文之三十九．

吉州，一十九贯八百八十五文，一十二分文之五．

术曰：以粟米互换求之．置石价并水脚，乘官斗合数，为实．各如本州合数而一，各得官斛石钱，以课贵贱．

【新释】 设平江石价为 a_1，每斗容量为 v_1，每石水脚钱为 b_1；安吉石价为 a_2，每斗容量为 v_2，每石水脚钱为 b_2；隆兴石价为 a_3，每斗容量为 v_3，每石水脚钱为 b_3；吉州石价为 a_4，每斗容量为 v_4，每石水脚钱为 b_4；潭州石价为 a_5，每斗容量为 v_5，每石水脚钱为 b_5；官斛每斗容量为 v．则各地籴米合官斛石价 S 为

$$S_i=\frac{(a_i+b_i)v}{v_i} \qquad (a)$$

【原草】 草曰：置安吉州石价 29 贯 500 文，平江石价 35 贯文，隆兴石价 28 贯 100 文，吉州石价 25 贯 850 文，潭州石价 27 贯 300 文，列右行．次置水脚安吉 1 贯 200 文，平江 900 文，隆兴 1 贯 700 文，吉州 2 贯 900 文，潭州 2 贯 100 文，列左行．各对本州石价，以两行数并之，得数，安吉 30 贯 700，平江 35 贯 900，隆兴 29 贯 800，潭州 29 贯 400，吉州 28 贯 750，仍于右行．次以文思院官斗 83 合，遍乘之，安吉州得 2548 贯 100 文，平江府得 2979 贯 700 文，江西隆兴得 2473 贯 400 文，湖南潭州得 2440 贯 200 文，江南吉州得 2386 贯 250 文，各为实于右行．次列安吉斗 110 合，平江斗 135 合，隆兴斗 115 合，潭州斗 118 合，吉州斗 120 合，于左行，

为法．以对除右行之实，安吉得23贯161文11分文之6，平江得22贯71文27分文之23，隆兴得21贯507文23分文之19，潭州得20贯679文59分文之39，吉州得19贯885文12分文之5相课石价，其安吉州最贵，平江次之，隆兴又次之，潭州又次之，吉州最贱．

【新释】 已知：$a_1=35000$文，$v_1=135$合，$b_1=900$文；$a_2=29500$文，$v_2=110$合，$b_2=1200$文；$a_3=28100$文，$v_3=115$合，$b_3=1700$文；$a_4=25850$文，$v_4=120$合，$b_4=2900$文；$a_5=27300$文；$v_5=118$合；$b_5=2100$文；$v=83$合．代入(α)式，得

$$S_1=\frac{(a_1+b_1)v}{v_1}=\frac{(35000+900)\times 83}{135}$$

$$=\frac{2979700}{135}=22\text{贯}\ 71\frac{23}{27}\text{文},$$

$$S_2=\frac{(a_2+b_2)v}{v_2}=\frac{(29500+1200)\times 83}{110}$$

$$=\frac{2548100}{110}=23\text{贯}\ 164\frac{6}{11}\text{文},$$

$$S_3=\frac{(a_3+b_3)v}{v_3}=\frac{(28100+1700)\times 83}{115}$$

$$=\frac{2473400}{115}=21\text{贯}\ 507\frac{19}{23}\text{文},$$

$$S_4=\frac{(a_4+b_4)v}{v_4}=\frac{(25850+2900)\times 83}{120}$$

$$=\frac{2386250}{120}=19\text{贯}\ 885\frac{5}{12}\text{文},$$

$$S_5=\frac{(a_5+b_5)v}{v_5}=\frac{(27300+2100)\times 83}{118}$$

$$=\frac{2440200}{118}=20\text{贯}\ 679\frac{39}{59}\text{文}.$$

比较S_i，得

$$S_2>S_1>S_3>S_5>S_4.$$

即安吉最贵，平江次之，隆兴又次之，潭州又次之，吉州最贱.

第十二卷 凡 六 问

49、囤 积 量 容

问有圆囤米二十五个，内有大囤一十二个，上径一丈，下径九尺，高一丈二尺．小囤一十三个，上径九尺，下径八尺，高一丈．今出租斗一只，口方九寸六分，底方七寸，正深四寸，并里明准尺．先令准数造五斗方斛及圆斛各二只，须令二斛口径正深，大小不同，各得多少，及囤积米几何？

答曰：方斛一只，口方六寸四分，底方一尺二寸，

深一尺五寸九分二厘.

又一只，口方一尺，底方一尺二寸，

深一尺一寸四分五厘.

圆斛一只，口径一尺二寸七分，底径一尺二寸，

深一尺二(原“二”误为“一”)寸一分四厘.

又一只，口径一尺三寸，底径一尺二寸，

深，一尺一寸八分五厘.

囤米，计六千五十石二斗八升五合五勺六抄三撮(原答：“八千六十七石四升七合四勺一抄八撮”．)

术曰：以商功及少广求之．置出斗上下方，相乘之，又各自乘，并之．乘深，又以五斗乘之，为积于上.

求方斛，先自如意立数，为斛深．又如意立数，为底方．置深为从隅，以底方乘隅，为从方，又以底乘从方，为减率，以减上积，余为实，开连枝平方，得方斛口方．不尽，以所得数为基，增损求之．以口底方相乘，又各自乘，并之，为法．除前上积，得深．余分，收弃之.

求圆斛，置四数，以因前积，为寄．如意立数为斛深，别如意立

数为底径，以三因深，为从隅，以底径乘隅，为从方，以底径乘从方，为减率，以减寄，余为实，开连枝平方，得口径．不尽，以所得为基，如意求差，以口底径相乘，又各自乘，并之，复三因之（原无“复三因之”一语），为法．除寄，得深．余分，收弃之．

求囤米，置各囤上径下径相乘，又各自乘，并之，乘高，又乘囤数，所得之数，为积．囤有大小，以类并之，为共积．如四而一，为实．以斛法除之，得米．

出斗				
	口方 Ⅲ⊥ 寸	上 上得 ⊥⊤= 寸	上 上位 ⊥⊤=	上 上 Ⅰ≣Ⅲ≡⊤ 寸
			副 得 ≣ǁ Ⅰ⊤ 寸	副 得 ≣Ⅲ 寸
	底方 ⊤⊤ 寸	中 口方 Ⅲ⊥ 寸	次 口方 Ⅲ⊥ 寸	次 底方 ⊤⊤ 寸
	正深 Ⅲ 寸	下 底方 Ⅲ 寸	下 口方 Ⅲ⊥ 寸	下 底方 ⊤⊤ 寸
	出斗为率	中乘下得上	次乘下得副以并上	次乘下，得副，以并上

	上	副	次	下	
	得‖○Ⅲ≡T寸	深Ⅲ寸	得Ⅲ≡‖≡Ⅲ寸	Ⅲ斗	上乘副，得次；次乘下，得斛积三段
	斛积≡丨⊥Ⅲ=寸	母Ⅲ	如意寸—T斛深	—‖寸斛底方	如意立此二数
	减积=‖○Ⅲ寸	底方—‖寸	丨≡‖从方	—T隅	副乘次，得上之减积数

商	实	方	隅	
	实—=⊥Ⅲ=寸	从方丨≡‖	从隅—T	方隅皆不可超进，乃约实，置商六寸
商T寸	实—Ⅲ⊥Ⅲ=寸	丨≡‖从方	—T从隅	约实，置首商六寸，生隅入方。
商T寸	实—Ⅲ⊥Ⅲ=	方‖≡Ⅲ	—T隅	以方命商，除实。
商T寸	实丨≡Ⅲ=	方=≡Ⅲ	—T隅	又以商生隅入方，

商	实	方	隅	
商丅寸	实	方	丅隅	方一退隅再退
商一寸	实	方	丅隅	约实续商三分
商丅寸	实	方	丅隅	以续商生隅入方
商丅寸	实	方	丅隅	以方命续商除实

商	实	方	隅	
商丅寸	实	方	丅隅	以续商又生隅入方
商丅寸	实	方	丅隅	方一退隅再退
商丅寸	实	方	丅隅	约实又续商五厘
商丅寸	实	方	丅隅	以续商生隅入方

上	副	次	下	
商 [illegible] 寸	实 [illegible] 寸 不及 [illegible]	[illegible] 方	[illegible] 隅	以隅命方，除实。
益隅 [illegible] 廉 [illegible] 寸	益隅廉	廉 [illegible] 口方 [illegible] 寸	元底 [illegible] 寸	造衍尽无隅，又益隅为分，其隅底得上。
上 [illegible] 上	口方 [illegible] 廉 副	口方 [illegible] 廉 次	下 [illegible] 下	副次廉自乘得下，上下相并，得后图上数。
上 [illegible] 上	底方 [illegible] 幂 副	底方 [illegible] 次	底方 [illegible] 下	底方自乘，为底方幂，乘上为法。

斗积图	斗积实 [illegible] 寸	[illegible] 法	实如法，除之，得泛深。
得泛深 [illegible]	口方 [illegible]	[illegible] 寸 累加	自基数变至于此，除得一尺五寸九分二厘，为泛深，尚在如意数，十六寸以下故累加口方，又求

上	副	次	下	
口方 一〇 寸	口方 一〇 寸	口方 一〇 寸	底方 一二 寸	累加口方自乘，得后图上。口方乘底方，得后图副。
上 [illegible] 寸	副 [illegible] 寸	次 底 一二	下 底 一二	上并副得后图副，底自乘，得后上。

上 [illegible]	副 [illegible]	次 [illegible] 法	上并副得次法
商 [illegible] 寸	实 [illegible]	[illegible] 法	以法除前斗积图内实，得商，为此深。
斜深	[illegible] 寸	[illegible] 寸	两等斜深。

方斛一只	口方 [illegible] 寸	深 [illegible] 寸	底方 [illegible] 寸	若数。
又一只	口方〇寸 [illegible]	深 [illegible] 寸	底方 [illegible] 寸	若数

因数 [illegible] 求圆积	前积 [illegible] 寸	若 [illegible] 寸	因数乘前积为若
若用因率 [illegible]	如意深 [illegible] 寸	如意底径〇寸 [illegible]	因率乘如意深，为从隅
[illegible] 从隅	〇 [illegible] 底		从隅乘如意底，为从方
从方〇寸 [illegible]	〇 [illegible] 底		从方乘底，为减积
减积〇寸并 [illegible]	[illegible] 圆若		以减积损圆若

术文	筹算
进退开除，得商。	实 𝍠𝍫〇𝍮𝍧𝍰 寸；从方 𝍢𝍮〇 寸；从隅 𝍫𝍥
益不及以就商，为基。	商 𝍩𝍣𝍯 寸；𝍧𝍮𝍡𝍰 实；不及 𝍡𝍫𝍣；𝍠𝍫𝍧𝍫𝍡 方；𝍫𝍥 隅
基并底，为和；如意差减和，得余	口径基 𝍩𝍣𝍮；底径 𝍩〇 寸；口底和 𝍪𝍣𝍮 寸；如意 〇𝍮 寸为差
半余为底径差，并底径，为口径	余寸 𝍪𝍣；𝍡 半法；底径 𝍩𝍡 寸；差 〇𝍮
上口径底径相乘，得	𝍠𝍭𝍡𝍫；𝍩𝍡；𝍩𝍡𝍮

术文	筹算
口径自乘，得口幂，口幂并上得后上	上 𝍠𝍭𝍡𝍫 寸；口径幂得 𝍠𝍮𝍠𝍪𝍧 寸；口径 𝍩𝍡𝍮；口径 𝍩𝍡𝍮
底径自乘，得底幂，底幂并上得后上。	上 𝍢𝍩𝍤𝍮𝍧；底幂 𝍠𝍫𝍣；底径 𝍩𝍪；底径 𝍩𝍡
三因上得法	上 [illegible] 寸；𝍢 因率；法 𝍩𝍢𝍮𝍢〇𝍥 寸
法除实，得商	𝍠𝍮𝍥𝍮𝍧𝍰 寸为实；𝍩𝍢𝍮𝍢〇𝍥 法寸

算图	说明
商 𝍩𝍡𝍩　实 𝍬𝍣𝍮𝍤𝍢　𝍠𝍫𝍦𝍫〇𝍯 法	法退，续商。
商 𝍩𝍡𝍩𝍣　实 𝍬𝍣𝍮𝍤𝍫　不及 𝍪𝍥×𝍧　𝍩𝍢𝍯𝍢〇𝍦 法	实不及，收就续商，为斛深。
斛深 𝍩𝍡𝍩𝍣　基 𝍩𝍣𝍯 寸　如意 〇𝍫 寸　得径 𝍩𝍤 寸	如意益分入基，为口径。
如意差 𝍠　和 𝍪𝍤 寸　底径 𝍩〇 寸　口径 𝍩𝍤 寸	底径并口径，为和，如意立差损和，为余。
余 𝍪𝍣 寸　𝍡 半法　中 𝍩𝍡 得寸　𝍠 差寸	半余，得中，以差并中，为口径。
上 𝍠𝍭𝍥 寸　口径 𝍩𝍢 寸　底径 𝍩𝍡 寸	两径相乘，得上。
并上 𝍠𝍮𝍨　口径 𝍩𝍢 寸　口径 𝍩𝍢 寸	口径相乘，得并。
上 𝍠𝍭𝍥　并上 𝍠𝍮𝍨　得 𝍠𝍬𝍣 寸　底 𝍩𝍡　底 𝍩𝍡	底自乘，并上。
并上 𝍣𝍮𝍨 寸　三因率　𝍩𝍣〇𝍦 法	三因得数，为法。
圆寄 𝍠𝍮𝍥𝍮𝍦𝍯　法 𝍩𝍣〇𝍦 寸	以法除圆寄，得商。

商[illegible]寸	余〇〇[illegible]寸 匣	[illegible]〇[illegible]法		余匣弃之
商[illegible]寸	收〇〇〇[illegible]寸	圆斛深[illegible]寸		收余毫得斛深。
圆斛一只	口径[illegible]寸	深[illegible]寸	底径[illegible]寸	答数
又一只	口径[illegible]寸	深[illegible]寸	底径[illegible]寸	答数

上〇〇〇[illegible]寸	圆上径〇〇[illegible]寸	圆下径〇[illegible]寸		上下径相乘 得上
上〇〇〇[illegible]寸	上径幂〇〇〇〇[illegible]寸	上径〇〇[illegible]寸	上径〇〇[illegible]寸	上径自乘 得为上幂 并上 后径
上〇〇〇[illegible]	下径幂〇〇[illegible]	下径〇[illegible]	下径〇[illegible]寸	下径自乘，为径幂，并上，得后上
得〇〇[illegible]寸	圆高〇[illegible]寸	得〇〇〇寸	圆数[illegible]	[illegible]

副乘下径，得次。

次〇寸 〇 ‖ ⊥‖

下径〇寸 ⊥|||

小副上径〇寸 ⊥|||

寄〇寸 〇〇☰〇‖〇丅☰|||

以上径自乘，得副，以副并上，得后上。

上径〇寸 ⊥|||

上径〇寸 ⊥|||

得〇寸 〇|⊥|||

次〇寸 〇‖⊥|||

下径自乘，得副，并上，得后上。

下径〇寸 ⊥‖

下径〇寸 ⊥‖

〇寸 〇〇|||⊥

次〇寸 〇|||☰|

以上乘副，得次，乘下，得后上。

下 ‖|—

次 〇〇〇〇Ⲧ—‖

副 〇〇|

上 〇〇Ⲧ—‖

以上并寄，得数，以三因之，得下数。

得〇寸 〇〇=〇=⊥|〇‖

|||因寄

得〇寸 〇〇☰|||=Ⲧ⊥

寄〇寸 〇〇☰‖〇丅|||

得〇寸 〇〇〇|=丅=

以四除前下，得数为实；二因，斗积为法。	法 / 因率 / 斗积 寸 / 实 寸 / 法
法除实，得商	法 寸 / 实 寸 / 商 石
其商，即圆米。	法 / 余 寸 / 商 石
方面四斛，皆同得此数。	石 / 大小二十五圆米

【新释】 设出租斗的上方为 a_1，下方为 a_2，高为 h，则出租斗容积为

$$v_0=\frac{1}{3}h(a_1^2+a_2^2+a_1a_2) \qquad (\alpha)$$

而所求五斗斛的容积为

$$v=5v_0=\frac{5}{3}h(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)$$

或

$$3v=5h(a_1^2+a_2^2+a_1a_2) \qquad (\beta)$$

I．求方斛：先如意立数 h_1' 为斛深，又如意立数 b_2 为底方，则求口方的公式为

$$v=\frac{1}{3}h_1'(b_1'^2+b_2^2+b_1'b_2)$$

或

$$h_1'\cdot b_1'^2+b_2h_1'\cdot b_1'-(3v-b_2^2h_1')=0 \qquad (\gamma)$$

这样求得的 b_1'，如果不是有尽数或者位数太多时，可增损使之成为适当的有尽数 b_1，然后再由次式，以求斛深：

$$h_1=\frac{3v}{b_1^2+b_2^2+b_1b_2} \qquad (\delta)$$

II．求圆斛：先如意立数 h_2' 为斛深，又如意立数 d_2' 为底径，则求口径 d_1' 的公式为

$$v=\frac{1}{12}\pi h_2'(d_1'^2+d_2'^2+d_1'd_2')$$

即
$$12v=\pi h_2'(d_1'^2+d_2'^2+d_1'd_2').$$

取 $\pi=3$，则得

$$3h_2'd_1'^2+d_2'\cdot 3h_2'\cdot d_1'-(4.3v-d_2'^2\cdot 3h_2')=0 \qquad (\varepsilon)$$

这样求得的 d_1'，若不为有尽数或位数太多时，可如意立差，增损使之成为适当的有尽数 d_1 和 d_2，再由次式以求斛深：

$$h_2=\frac{12v}{\pi(d_1^2+d_2^2+d_1d_2)} \qquad (\zeta)$$

III. 求囤米：设大囤上径为 D_1，下径为 D_2，高为 H，囤数为 n，则大囤积米 A_1 为

$$A_1=\frac{n\pi H}{12v_0}(D_1^2+D_2^2+D_1D_2)$$

$$=\frac{nH}{4v_0}(D_1^2+D_2^2+D_1D_2)$$

$$=\frac{nH}{4\left(\frac{2v}{10}\right)}(D_1^2+D_2^2+D_1D_2)\text{斗}$$

$$=\frac{3nH(D_1^2+D_2^2+D_1D_2)}{4\times2(3v)}\text{石} \qquad (\eta_1)$$

又设小囤上径为 D_1'，下径为 D_2'，高为 H'，囤数为 n'，则小囤积米 A_2 为

$$A_2=\frac{n'\pi H'}{12v_0}(D_1'^2+D_2'^2+D_1'D_2')$$

$$=\frac{n'H'}{4v_0}(D_1'^2+D_2'^2+D_1'D_2')$$

$$=\frac{n'H'}{4\left(\frac{2v}{10}\right)}(D_1'^2+D_2'^2+D_1'D_2')\text{斗}.$$

$$=\frac{3n'H'(D_1'^2+D_2'^2+D_1'D_2')}{4\times2(3v)}\text{石} \qquad (\eta_2)$$

而共积米

$$A=A_1+A_2$$

$$=\frac{\frac{3}{4}[nH(D_1^2+D_2^2+D_1D_2)+n'H'(D_1'^2+D_2'^2+D_1'D_2')]}{2(3v)} \qquad (\eta)$$

【原草】 草曰：置出租斗口方 9 寸 6 分，与底方 7 寸相乘，得 67 寸 2 分于上. 又以口方 9 寸 6 分自乘之，得 92 寸 1 分 6 厘，加上. 又以底方 7 寸自乘，得 49 寸，又加上. 共得 208 寸 3 分 6 厘，乘深 4 寸，得 833 寸 4 分 4 厘. 又以 5 斗乘之，得 4167 寸 2 分，为三段斛积于上.

求方斛，如意立1尺6寸，为斛深．又如意立1尺2寸，为斛底．以深16寸为从隅，以底12寸乘隅，得192寸，为从方．又以底12寸，乘从方192寸，得2304寸，为减积．以减上积4167寸2分，余1863寸2分，为实．开连枝平方，得6寸3分5厘，为基．其积不及1寸1分6厘，系有亏数，其基数为未可用．须合损益基数，今益作6寸4分，为口方．以元立1尺2寸为底方，以口方乘底方，得76寸8分于上．又以口方6寸4分自乘，得40寸9分6厘，又以底方12寸自乘，得144寸，并以加上，共得261寸7分6厘，为法．以除前积4167寸2分，得1尺5寸9分2厘，为方斛深．其积不及1厘9毫2丝，收为闰．又累增至10寸，为口方．仍以12寸，为底方．乃以口方10寸，乘底方12寸，得120寸，于上．又以口方自乘，得100寸，加上．又以底方自乘，得144寸，又加上．共得364寸，为法．亦除前实积4167寸2分，得11寸4分5厘，为方斛深．其积不及6分，收为闰．此是求出两等斛数，在人择而用之．

求圆斛，置4数，以因前积4167寸2分，得16668寸8分为寄．如意立1尺2寸，为圆斛深．又如意立1尺，为底径．以3因深，得36寸，为从隅．乃以底10寸乘隅，得360寸，为从方．又以底10寸乘从方，得3600寸，为减率．以减寄16668寸8分，余13068寸8分，为实．开连枝平方，得1尺4寸7分，为基．其实不及2寸4分4厘，收为闰．次以元立底径1尺，并基1尺4寸7分，得2尺4寸7分，只减7分为差，余2尺4寸，以半之，得1尺2寸，为底径．以差7分，并底径，得1尺2寸7分，为口径．始以口径1尺2寸7分，乘底径1尺2寸，得152寸4分于上．次以口径自乘，得161寸2分9厘，加上．又以底径自乘，得144寸，又加上．共得457寸6分9厘，以3因之，得1373寸7厘，为法．除前圆寄16668寸8分，得1尺2寸1分4厘，为圆斛正深．其实不及2毫6丝9忽8微，收为闰．又以基1尺4寸7分，增3分，得1尺5

寸,并底径1尺,得2尺5寸,减1寸为差,余2尺4寸,以半之,得1尺2寸,为底径. 以差1寸并底径1尺2寸,得1尺3寸,为口径. 始以口径13寸,乘底径1尺2寸,得156寸,于上. 又以口径13寸自乘,得169寸,加上. 又以底径12寸自乘,得144寸,又加上. 共得469寸,以3因之,得1407寸,为法. 除前圆寄16668寸8分,得1尺1寸8分4厘7毫,为圆斛深. 寄余7厘1毫,欲收深7毫,作1厘. 通得1尺1寸8分5厘,为圆斛深. 此是求出两

16+192	−1863.2	
96	+1728	6
16+288	− 135.2	
96		
16+384	− 135.2	
4.8+	116.64	0.3
16+388.8−	18.56	
4.8		
16+393.6−	18.56	
0.8+	19.72	0.05
16+394.4+	1.16	

$$\therefore \quad b_1' = 6.35 \text{ 寸}.$$

取 $b_1 = 6.4$ 寸，代入(δ)式，得

$$h_1 = \frac{4167.2}{40.96+144+76.8} = \frac{4167.2}{261.76} = 15.92 \text{ 寸}.$$

答：第一只方斛：口方 6.4 寸，底方 12 寸，深 15.92 寸。

复设累加数为 3.6 寸，则累加口方 $b_1 = 10$ 寸．由(δ)式，得

$$h_1 = \frac{4167.2}{100+144+120} = \frac{4167.2}{364} = 11.45 \text{ 寸}.$$

答：第二只方斛：口方 10 寸，底方 12 寸，深 11.45 寸。

II．求圆斛：设 $h_2' = 12$ 寸，$d_2 = 10$ 寸，代入(ε)式，得

$$36d_1'^2 + 360d_1' - (4\times 4167.2 - 3600) = 0$$

即

$$36d_1'^2 + 360d_1' - 13068.8 = 0.$$

36+ 360	−13068.8	
360	+ 7200	10
36+ 720	− 5868.8	
360		
36+1080	− 5868.8	
144	+ 4896	4
36+1224	− 972.8	
144		
36+1368	− 972.8	
25.2+	975.24	0.7
36+1393.2+	2.44	

$$\therefore\quad d_1' = 14.7^{-}\text{寸}.$$

今口底和：$d_1'+d_2'=24.7$ 寸，设如意差为 0.7 寸，则得

底径：$$d_2=\frac{24.7-0.7}{2}=12\text{寸},$$

口径：$$d_1=12\text{寸}+0.7\text{寸}=12.7\text{寸}.$$

代入(ζ)式，得

$$h_2=\frac{4\times4167.2}{3(12.7^2+12^2+12.7\times12)}=\frac{16668.8}{3\times457.69}=12.14\text{寸}.$$

答：第一只圆斛：口径 12.7 寸，底径 12 寸，深 12.14 寸。

复设益分为 0.3，如益差为 1 寸，则得

底径：$$d_2=\frac{24.7+0.3-1}{2}=12\text{寸},$$

口径：$$d_1=12\text{寸}+1\text{寸}=13\text{寸}.$$

代入(ζ)式，得

$$h_2=\frac{16668.8}{3(13^2+12^2+13\times12)}=\frac{16668.8}{3\times469}=11.85^{-}\text{寸}.$$

答：第二只圆斛：口径 13 寸，底径 12 寸，深 11.85 寸。

III．求囤米：已知：$D_1=100$ 寸，$D_2=90$ 寸，$H=120$ 寸，$n=12$；$D_1'=90$ 寸，$D_2'=80$ 寸，$H'=100$ 寸，$n'=13$．代入(η)式，得

$$A=\frac{1}{2\times4167.2}\times\frac{3}{4}[12\times120(100^2+90^2+100\times90)+13\times100(90^2+80^2+90\times80)]$$

$$=\frac{1}{8334.4}\times\frac{3}{4}[12\times120\times27100+13\times100\times21700]$$

$$=\frac{\frac{3}{4}[39024000+28210000]}{8334.4}=\frac{50425500}{8334.4}$$

$$=6050.285563\text{石}=6050\text{石}2\text{斗}8\text{升}5\text{合}5\text{勺}6\text{抄}3\text{撮}.$$

【注 1】 清沈钦裴谓“草中于共得数下，遗漏三因四除，故得数多四分之一．”李锐亦曾作类似之校正．

【注 2】 事实上，求方斛时，可如意立数为口方和底方，径由(δ)式以求斛深．求圆斛时，亦可如意立数为口径和底径，而径由(ζ)式以求斛深．

50．积仓知数

问和籴米运，借仓权顿．计五十敖，每敖阔一丈五尺，深三丈，米高一丈二尺．又借寺屋四十间，内二十五间阔一丈二尺，深二丈五尺，米高一丈．内一十五间，各阔一丈三尺，深三丈，米高一丈二尺．欲知寺屋及仓容米共计几何?

答曰：共计米一十六万六千八十石，

仓五十敖米一十万八千石，

寺屋四十间，米五万八千八十石．

术曰：商功求之．置敖并屋深阔米高相乘，并之为实．如斛法而一．

【新释】 设敖阔为 a，敖深为 b，米高为 h，敖数为 m，斛法为 d，则敖容米：

$$A_1=\frac{mabh}{d} \qquad (\alpha)$$

又设第一类寺屋，其阔为 a_1'，深为 b_1'，米高为 h_1'，间数为 m_1'；第二类寺屋，其阔为 a_2'，深为 b_2'，米高为 h_2'，间数为 m_2'．则寺屋容米：

$$A_2=\frac{m_1'a_1'b_1'h_1'+m_2'a_2'b_2'h_2'}{d} \qquad (\beta)$$

而共容米

$$A=A_1+A_2=\frac{mabh+m_1'a_1'b_1'h_1'+m_2'a_2'b_2'h_2'}{d} \qquad (\gamma)$$

【原草】 草曰：先以敖深 3 丈，通为 30 尺，乘阔 15 尺，得 450 尺，又乘高 12 尺，得 5400 尺，以乘 50 敖，得 270000 尺，为实．以

斛法 2 尺 5 寸除之，得 108000 石，为仓 50 敖共容米．次置寺屋深 25 尺，乘阔 12 尺，得 300 尺，又乘米高 10 尺，得 3000 尺，以 25 间乘之，得 75000 尺于上．次置深 30 尺，乘阔 13 尺，得 390 尺，又乘米高 12 尺，得 4680 尺，以乘 15 间，得 70200 尺，加上．共得 145200 尺，为寄．斛法 2 尺 5 寸除之，得 58080 石，为寺屋 40 间共容米．以并敖米，共得 166080 石，为共和籴到米．

【新释】 已知：$a=15$ 尺，$b=30$ 尺，$h=12$ 尺，$m=50$，$d=2.5$，$a_1'=12$ 尺，$b_1'=25$ 尺，$h_1'=10$ 尺，$m_1'=25$；$a_2'=13$ 尺，$b_2'=30$ 尺，$h_2'=12$ 尺，$m_2'=15$．由(α)式，得

$$A_1=\frac{50\times15\times30\times12}{2.5}=108000 \text{ 石}.$$

由(β)式，得

$$A_2=\frac{25\times12\times25\times10+15\times13\times30\times12}{2.5}$$

$$=\frac{75000+70200}{2.5}=58080 \text{ 石}.$$

由(γ)式，得共容米

$$A=A_1+A_2=108000+58080=166080 \text{ 石}.$$

51、推 知 籴 数

问和籴三百万贯，求米石数．闻每石牙钱三十，籴场量米折支牙人所得．每石出牵钱八百，牙人量米四石六斗八合，折与牵头．欲知米数石价牙钱牙米牵钱各几何？

答曰：籴到米一十二万石．

石价，二十五贯文，

牙钱，三千六百贯文，

折米，一百四十四石．

牵钱，一百一十五贯二百文．

余米〇〇〇〇〇〇〇〇〇≡ 本文

牙钱〇≡ 文

得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇[rod numeral] 文

牵钱〇[rod numeral] 文

先以上乘副，得次；乃以次乘下，得实。

石价实〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇‖[rod numeral] 文

方〇

廉〇

隅[rod numeral]〇[rod numeral] 石

首图牙钱牵钱，皆系石率所乘余本，为石价之实，今以牵米为立方隅，当以四石自文下起步。

商〇

实〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇‖[rod numeral]

方〇

廉〇

隅≡丅〇[rod numeral] 石

隅超二位，约商得十。

商〇

实〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方〇

廉〇

隅 石

隅再超二，商约得百。

商〇

实〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方〇

廉〇

隅 石

隅又超二，商约得貫。

商〇

实〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方〇

廉〇

隅 石

隅复超二，商约十貫。

商 ‖〇〇〇〇

实 ╧‖〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方〇

廉〇

隅 ⫼ ⊥〇╧ 石

隅不可超，商定廿贯。

商 ‖〇〇〇〇

实 ╧‖〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方〇 文

廉 ㄨ=|⊥〇 文

隅 ⫼ ⊥〇╧ 石

以商生隅，得廉。

商 ‖〇〇〇〇

实 ╧‖〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方 ━〇ㄨ⫼=〇〇〇〇〇 文

廉 ㄨ=|⊥〇 文

隅 ⫼ ⊥〇╧ 石

以商生廉，得方。以方命商，除实。

商 𝍡〇〇〇〇

实 𝍫〇𝍩𝍢𝍮〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方 𝍩𝍧𝍰𝍢𝍪〇〇〇〇〇 文

廉 𝍢𝍪𝍠𝍮〇 文

隅 𝍧𝍮〇𝍰 石

以商生隅，入廉。

商 𝍡〇〇〇〇

实 𝍫〇𝍩𝍧𝍮〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方 𝍩𝍧𝍰𝍢𝍪〇〇〇〇〇 文

廉 𝍩𝍧𝍰𝍢𝍪〇 文

隅 𝍧𝍮〇𝍰 石

以商生廉，入方。

商 𝍡〇〇〇〇

实 𝍫〇𝍩𝍧𝍮〇〇〇〇〇〇〇〇〇 文

方 〇〇𝍪〤𝍮〇〇〇〇〇 文

廉 𝍩𝍧𝍰𝍢𝍪〇 文

隅 𝍧𝍮〇𝍰 石

以商生隅，续入廉。

商
Ⅱ○○○○

实
≡○一Ⅲ⊥○○○○○○○○○
文

方
≣○═Ⅲ⊥○○○○○
文

廉
═Ⅲ⊥Ⅲ≡○
文

隅
Ⅲ⊥○≡
石

方一退，廉再退，隅三退。

商
Ⅱ○○○○

实
≡○一Ⅲ⊥○○○○○○○○○
文

方
Ⅲ○Ⅱ≡┬○○○○○
文

廉
═Ⅲ⊥Ⅲ≡○
文

隅
≡┬○Ⅲ
石

约实，续商五贯。

商
Ⅱ≣○○○

实
≡○一Ⅲ⊥○○○○○○○○○
文

方
Ⅲ○Ⅱ〤┬○○○○○
文

廉
═Ⅲ⊥Ⅲ≡○
文

隅
≡┬○Ⅲ
石

以续商生隅，入廉。

商

实〇文

方〇文

廉〇文

隅
石

以续商生廉，入方。

商

实〇文

方〇文

廉〇文

隅
石

乃以方命续商，除实适尽。

余本实〇文

石价法〇文

余到米〇石

牙钱〇文

以石价除余本实，得余到米；以余到米乘石价，得牙钱。

牙钱 文

法 文

牙米 石

牵钱 文

以石价除牙钱，得牙米，以牵钱乘牙米，得都牵钱。

都牵钱 实

石价 法

术曰：以商功求之，率变入之．置粜本，牙钱，牵钱，相乘为实，以牵米为隅，开连枝立方，得石价．以价除本，得粜到米．以牙钱乘米，得总牙钱．以价除之，得牙米．以牵钱乘牙米，得共牵钱．

【新释】 设粜本为 A，石价为 x，则粜到米

$$石数=\frac{A}{x} \qquad (\alpha)$$

复设每石牙钱为 a，则

$$共牙钱=\frac{aA}{x} \qquad (\beta)$$

$$牙米=\frac{aA}{x^2} \qquad (\gamma)$$

次设每石牙米牵钱为 b，则

$$共牵钱=\frac{abA}{x^2} \qquad (\delta)$$

又设牙人牵钱折米石数为 B，则

$$Bx=\frac{abA}{x^2}$$

或

$$Bx^3-abA=0 \qquad (\varepsilon)$$

【原草】 草曰：置籴米 300 万贯，乘牙钱 30 文，得 9000 万贯，又乘牵钱 800 文，得 720 亿万贯，为价实．置牵米 4 石 6 斗 8 合，于实数零文之下，为立方从隅．起步，步法常超二位，每超一度，商进之．今隅凡超四度，当于实上约定首商 20 贯．乃以商生隅 4 石 6 斗 8 合，得 92 贯 160 文，乃以为廉．又以商生廉，得 1843200 贯为方．乃以方命上商 20 贯，除实讫，实余 3513600 万贯．复以商生隅 4 石 6 斗 8 合，入廉，得 184 贯 320 文．又以商生廉，加入方内，得 5529600 贯，为方法．复以商又生隅 4 石 6 斗 8 合，加入廉，得 276 贯 480 文，为廉法．其方法一退，廉法二退，从隅三退．乃于首商之次，约实续商 5 贯．以续商生隅 4 石 6 斗 8 合，入廉，得 299 贯 520 文．又以续商生廉，入方，得 7027200 贯．乃命续商 5 贯，除实适尽．所得 25 贯，为每石米价，以为法．以籴本 300 万贯为实，如法而一，得 12 万石，为籴到米数．以米数乘牙钱 30，得 3600 贯，为牙钱．以石价 25 贯，除牙钱 3600 贯文，得 144 石，为籴场量米折牙钱．以牵钱 800，乘牙米 144 石，得 115 贯 200 文，为牵头得牙人所与牵钱之数．今乃以石价 25 贯文，约牵钱 115 贯 200 文，得 4 石 6 斗 8 合，为牵钱折米．合问．

【新释】 已知：$A=3000000000$ 文，$B=4.608$ 石，$a=30$ 文，$b=800$ 文．代入(ε)式，得

$$4.608x^3-72000000000000=0.$$

解之，其草式如次：

$$\begin{array}{rrrr|r}
4.608+ & 0+ & & 0-72000000000000 & \\
 & 92160+ & 1843200000+ & 36864000000000 & 20000 \\
\hline
4.608+ & 92160+ & 1843200000- & 35136000000000 & \\
 & 92160+ & 3686400000 & & \\
\hline
4.608+ & 184320+ & 5529600000 & & \\
 & 92160 & & & \\
\hline
4.608+ & 276480+ & 5529600000- & 35136000000000 & \\
 & 23040+ & 1497600000+ & 35136000000000 & 5000 \\
\hline
4.608+ & 299520+ & 7027200000+ & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad x=25000\text{ 文}.$$

由(α)式，得

$$\text{粜到米}=\frac{3000000000}{25000}=120000\text{ 石}.$$

由(β)式，得

$$\text{总牙钱}=120000\times30=3600000\text{ 文}.$$

由(γ)式，得

$$\text{牙米}=\frac{3600000}{25000}=144\text{ 石}.$$

由(δ)式，得

$$\text{都牵钱}=144\times800=115200\text{ 文}.$$

52、分定纲解

问州郡合解诸司窠名钱，户部九十六万五千四百二十一贯文，总所六十四万三千六百一十四贯文，运司一万六千九十贯三百五十文．今诸窠名，先催到九千二百五十三贯六百二十文，欲照元额分数，均定樁米候解，合各几何？

答曰：户部五千四百九十七贯二百文，

总所三千六百六十四贯八百文，

运司九十一贯六百二十文.

术曰：以衰分求之．置诸元率，可约，约之．副并为法，以催到钱乘未并者，各为实，实如法而一．

【新释】　设户部应得窠名钱为 a_1，总所应得为 a_2，运司应得为 a_3．先催到钱数为 A，照元额分配，则得

$$\text{户部候解}=\frac{a_1A}{a_1+a_2+a_3} \tag{α}$$

$$\text{总所候解}=\frac{a_2A}{a_1+a_2+a_3} \tag{β}$$

$$\text{运司候解}=\frac{a_3A}{a_1+a_2+a_3} \tag{γ}$$

【原草】　草曰：列户部 965421 贯，总所 643614 贯，运司 16090 贯 350 文，各为元率．今元率可约，求等，得 16090 贯 350 为等数，俱约之，户部得 60，总所得 40，运司得 1，各为率，副并得 101 为法．次置催到 9253 贯 620 文，为总积．以户部率 60 乘之，得 555217 贯 200，以总所率乘，得 370144 贯 800，以运司率乘，得 9253 贯 620 文，各为候解钱分积率．各如 101 而一，其户部得 5497 贯 200 文，总所得 3664 贯 800 文，运司得 91 贯 620，各为候解钱．

【新释】　已知：$a_1=965421000$ 文，$a_2=643614000$ 文，$a_3=16090350$ 文，$A=9253620$ 文．代入(α)至(γ)各式，得

$$\begin{aligned}\text{户部候解}&=\frac{965421000\times9253620}{965421000+643614000+16090350}\\&=\frac{60\times9253620}{60+40+1}=\frac{555217200}{101}\\&=5497\text{贯}200\text{文},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{总所候解}&=\frac{40\times9253620}{101}=\frac{370144800}{101}\\&=3664\text{贯}800\text{文},\end{aligned}$$

$$远司候解=\frac{1\times9253620}{101}=91贯620文.$$

53、累收库本

问有库本钱五十万贯，月息六厘半．令今掌事每月带本纳息，共还一十万．欲知几何月而纳足，并末后畸钱多少？

答曰：本息纳足，共七个月．

末后一月钱，二万四千七百六贯二百七十九文三分四厘八毫四丝六忽七微七沙三莽一轻二清五烟．

术曰：以盈朒变法求之．置元本，以息数退位，乘归本位，每出共纳，累得月数．以末后不及数，为足月钱数．

【新释】 设库本为 A，月息为 p，每月带本纳息数为 B，本息纳足月数为 n，则得

第一月末余本：

$$A_1=A(1+p)-B \qquad (\alpha_1)$$

第二月末余本：

$$A_2=A_1(1+p)-B \qquad (\alpha_2)$$

………；

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

第 n 月末畸钱：

$$A_n=A_{n-1}(1+p)\leqslant B \qquad (\alpha_n)$$

【原草】 草曰：置本 50 万贯，以 6 厘 5 毫乘，入共本内，得 532500 贯文．内减初月 10 万贯，余 432500 贯文，以 6 厘 5 毫乘之，得 460612 贯 500 文．又减次月 10 万贯，余 360612 贯 500 文，又以 6 厘 5 毫乘之，得 384052 贯 312 文 5 分．又减第三月钱 10 万贯，余 284052 贯 312 文 5 分，又以 6 厘 5 毫乘之，得 302515 贯 712 文 8 分 1 厘 2 毫 5 丝，内减第四月钱 10 万贯，余 202515 贯 712 文 8 分 1 厘 2 毫 5 丝，又以 6 厘 5 毫乘之，得 215679 贯 234 文

1分4厘5毫3丝1忽2微5尘. 内减第五月钱10万贯，余115679贯234文1分4厘5毫3丝1忽2微5尘，又以6厘5毫乘之，得123198贯384文3分6厘4毫7丝5忽7微8尘1沙2渺5莽. 减第六月钱10万贯，余23198贯384文3分6厘4毫7丝5忽7微8尘1沙2渺5莽，又以6厘5毫乘之，得24706贯279文3分4厘8毫4丝6忽7微无尘7沙无渺3莽1轻2清5烟，为第七月纳足本息畸钱.

【新释】 已知：$A=500000000$ 文，$p=0.065$，$B=100000000$ 文，代入(α_i)各式，得

$$A_1=500000000(1+0.065)-100000000$$
$$=532500000-100000000=432500000\text{ 文}$$
$$=432500\text{ 贯文},$$
$$A_2=432500000(1+0.065)-100000000$$
$$=460612500-100000000=360612\text{ 贯 }500\text{ 文},$$
$$A_3=360612500(1+0.065)-10^8$$
$$=384052312.5-10^8=284052\text{ 贯 }312.5\text{ 文},$$
$$A_4=284052312.5(1+0.065)-10^8$$
$$=302515712.8125-10^8$$
$$=202515\text{ 贯 }712.8125\text{ 文},$$
$$A_5=202515712.8125(1+0.065)-10^8$$
$$=215679234.1453125-10^8$$
$$=115679\text{ 贯 }234.1453125\text{ 文},$$
$$A_6=115679234.1453125(1+0.065)-10^8$$
$$=123198384.3647578125-10^8$$
$$=23198\text{ 贯 }384.3647578125\text{ 文},$$
$$A_7=23198384.3647578125(1+0.065)$$
$$=24706\text{ 贯 }279.3484670703125\text{ 文}.$$
$$\because\quad A_7<B,$$

$$\therefore\quad n=7.$$

54、米谷粒分

问开仓受纳，有甲户米一千五百三十四石到廊，验得米内夹谷．乃于样内取米一捻，数计二百五十四粒，内有谷二十八颗．凡粒米率，每勺三百，今欲知米内杂谷多少，以折米数科责及粒，各几何？

答曰：米，一千三百六十四石八斗九升七合六勺，一百二十七分之四十八。

谷，一百六十九石一斗二合三勺，一百二十七分勺之七十九。

合折米八十四石五斗五升一合一勺．一百二十七分勺之一百三。

元米折米，共计四十三亿四千八百三十四万六千四百五十六粒．

术曰：以粟米求之，衰分入之．置样米粒数为法，以带谷颗数减之，余与谷，为列衰，可约，约之。以共米乘列衰，为各实．实如法而一，各得米数谷数．置谷数，以粟率折之，为谷所折米．次以勺率，遍乘米数折米，得粒数．

【新释】 设甲户送到米 A 石，样米粒数为 a，内夹谷 b 粒，则米为 $a-b$ 粒，又设粟率为 p，勺率为 r，则实际收到甲户

$$米=\frac{(a-b)A}{a} \qquad (\alpha)$$

$$谷=\frac{bA}{a} \qquad (\beta)$$

$$谷折米=\frac{pbA}{a} \qquad (\gamma)$$

元米折米

$$共粒数=\frac{r(a-b)A}{a}+\frac{rpbA}{a} \qquad (\delta)$$

【原草】 草曰：置一捻样粒数 254，为法．以带谷 28 颗，为谷

衰. 以减法,余 226,为米衰. 此二衰与法,皆可约,求等,得 2,俱以 2 约之,法得 127,米衰得 113,谷衰得 14. 以共米 1534 石,遍乘二衰,得 173342 石,为米实. 得 21476 石,为谷实. 皆如法 127 而一,米得 1364 石 8 斗 9 升 7 合 6 勺 127 分勺之 48,谷得 169 石 1 斗 2 合 3 勺 127 分勺之 79. 以粟率 50 折之,得 84 石 5 斗 5 升 1 合 1 勺 127 分勺之 103,为谷折纳米数. 并二米,得 1449 石 4 斗 4 升 8 合 8 勺 127 分勺之 24,先通分纳子,得 184080 石,以勺率 300 粒乘子,得 55224000 万粒,为实. 以母 127 除之,得 4348346456 粒,不尽 88,弃之. 合问.

【新释】 已知:$A=1534$ 石,$a=254$ 粒,$b=28$ 粒,$a-b=226$ 粒,$p=50\%$,$r=300$ 粒. 代入(α)至(δ)各式,得收到甲户

$$米=\frac{(254-28)\times1534}{254}=\frac{113\times1534}{127}$$

$$=1364石\ 8斗\ 9升\ 7合\ 6\frac{48}{127}勺,$$

$$谷=\frac{28\times1534}{254}=\frac{14\times1534}{127}=169石\ 1斗\ 2合\ 3\frac{79}{127}勺,$$

$$谷折米=\frac{28\times1534}{254}\times\frac{50}{100}=84石\ 5斗\ 5升\ 1合\ 1\frac{103}{127}勺,$$

元米折米粒数

$$=\left(1364石\ 8976\frac{48}{127}勺+84石\ 5511\frac{103}{127}勺\right)\times300$$

$$=\left(1449石\ 4488\frac{24}{127}勺\right)\times300=\frac{552240000000}{127}$$

$$=4348346456粒.$$

余 $\frac{88}{127}$ 粒,弃之.

【注】 余分 88,半以上,应辈为 1 粒.

第七章 营 建 类

本章是关于建筑工程方面的问题，其中有许多的计算公式和常数，对于祖国社会主义建设——尤其是基本建设来说，是极富于现实意义和具有高度的参考价值的.

在"计定城筑""计浚河渠"和"计作清台"各问中，应用了"坚三穿四壤五"的常数，那是说在普通的地面上，挖土四个单位体积，便可给出五个单位体积的壤土，而能筑坚(如墙，堤等)三个单位体积. 这对于开渠、修堰、筑墙、铺路以及其它有关使用土方的问题，都可以应用这些常数，作出来较为精确的计划. 在"竹围芦束"中所述的"圆束差六"，虽然建筑在$\pi=3$的基础上，但对于一般数字不太大的圆束来说，它的绝对误差是很小的.

在"计造石坝"一问中，秦氏应用了招差法，给出了一阶等差级数求和S及求末项l的公式：

$$S=na+\frac{n(n-1)}{2}d \qquad (\alpha)$$

$$l=a+(n-1)d \qquad (\beta)$$

又在"竹围芦束"中，给出了关于圆束问题已知末项l及公差d，以求和S的等差级数的公式：

$$S=\frac{l(l+d)}{2d}+1 \qquad (\gamma)$$

(γ)式的来源，可能是这样的：设有直径相等的圆状物体多个，作成圆束，其相邻两层的个数，显然是不相等的. 若内层直径为D，则外层直径为$D+2$，由此可以推断，圆束各层的直径，或者都是奇

数，或者都是偶数，当直径为奇数时，圆束的层数递次增加后的圆状物体个数的数列为：

$$\frac{\pi}{4}\times 1^2,\ \frac{\pi}{4}\times 3^2,\ \frac{\pi}{4}\times 5^2,\ \frac{\pi}{4}\times 7^2,\ \cdots$$

或

$$\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}+2\pi,\ \frac{\pi}{4}+6\pi,\ \frac{\pi}{4}+12\pi,\ \cdots \tag{1}$$

这个数列的一阶差和二阶等差(圆束差)是：

$$2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots \tag{2}$$

$$2\pi,\ 2\pi,\ \cdots \tag{3}$$

但圆束问题，必须给出整数答案，于是在(1)～(3)各式中，必须采用近似值．我们若取 $\frac{\pi}{4}=1$ 和 $\pi=3$，则(1)～(3)各式化为：

$$1(a_1),\ 7,\ 19,\ 37,\ \cdots \tag{4}$$

$$6(d_1),\ 12,\ 18,\ \cdots \tag{5}$$

$$6(d_2),\ 6,\ \cdots \tag{6}$$

这里(4)式中的第 n 项，就是(γ)式中的总数 S．应用招法求第 n 项的公式，便可给出：

$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot d_2 \tag{7}$$

次设末项(外围竿数)为 l，圆束差为 d，由所给条件，可知：

$$n-1=\frac{l}{d},\ d_1=d_2=d.$$

代入(7)式，得

$$a_n=1+\frac{l}{d}\left[d+\frac{\frac{l}{d}-1}{2}\cdot d\right]=1+\frac{l(l+d)}{2d} \tag{8}$$

(8)式一如(γ)式之所示．

第十三卷　凡　四　问

55. 计定城筑

问淮郡筑一城，围长一千五百一十丈．外筑羊马墙，开濠，长与城同，城身高三丈，面阔三丈，下阔七丈五尺．羊马墙高一丈，面阔五尺，下阔一丈．开濠面阔三十丈，下阔二十五丈．女头鹊台共高五尺五寸，共阔三尺六寸，共长一丈．鹊台长一丈，高五寸，阔五尺四寸．座子长一丈，高二尺二寸五分，阔三尺六寸．肩子高一尺二寸五分，阔三尺六寸，长八尺四寸．帽子高一尺五寸，阔三尺六寸，长六尺六寸．箭窗三眼，各阔六寸，长七寸五分，外眼比内眼斜低三寸．取土用穿四坚三为率，周回石版，铺城脚三层，每片长五尺，阔二尺，厚五寸．通身用砖包砌，下一丈九幅，中一丈七幅，上一丈五幅，砖每片长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分．护嶮墙高三尺，阔一尺二寸，下脚高一尺五寸，铺砖三幅，上一尺五寸，铺砖二幅．每长一丈，用木物料永定柱二十条，长三丈五尺，径一尺，每条截埋功七分，串凿功三分．爬头拽后木共八十条，长二丈，径七寸，每条作功三分，串凿功二分．抟子木二百条，长一丈，径三寸，每条作功二分，般加功二分．维橛二千个，每个长一尺，方一寸，每个功七毫．维索二千条，长一丈，径五分，每条功九毫．石版一十片，匠一功，般一功．每片灰一十斤，般灰千斤，用一功．砖匠每功砌七百片，石灰每砖一斤．芦席一百五十领，青茅五百束，丝竿笙竹五十条，芮子水竹一十把，每把二尺围，镬手锹手担土杵手，每功各六十尺．火头一名，管六十工．部押濠寨一名，管一百二十工．每工日支新会一百文，米二升五合．欲(原无"欲"字)知城墙坚积濠积濠深共用木竹橛索砖石灰芦茅人工钱米共数各几何？

答曰：城积，二千三百七十八万二千五百尺坚积，

墙积，一百一十三万二千五百尺坚积．

濠积，三千三百二十二万尺穿积，

濠深，八尺（原为"八丈"）.

永定柱，三万二百条，每条长三丈五尺，径一尺.

爬头拽后木，一十二万八百条，每条长二丈，径七寸.

搒子木，三十万二千条，每条长一丈，径三寸.

维橛子，三百二万个，每个长一尺，方一寸.

维索，三百二万条，每条长一丈，径五分.

芦席，二十二万六千五百领.

青茅，七十五万五千束，每束六尺围.

笙竹，七万五千五百竿，每竿六寸围.

水竹，一万五千一百把，每把二尺（原为"寸"）围.

石版，一万五千一百片.

城砖，一千二百八十万六千三百一十片（原答：一千二百八十三万三千四百九十片）.

石灰，一千二百九十五万七千三百一十斤（原答：一千二百九十八万四千四百九十斤.）.

用功，二百万三千七百七十功.

新会，二十万三百七十七贯文.

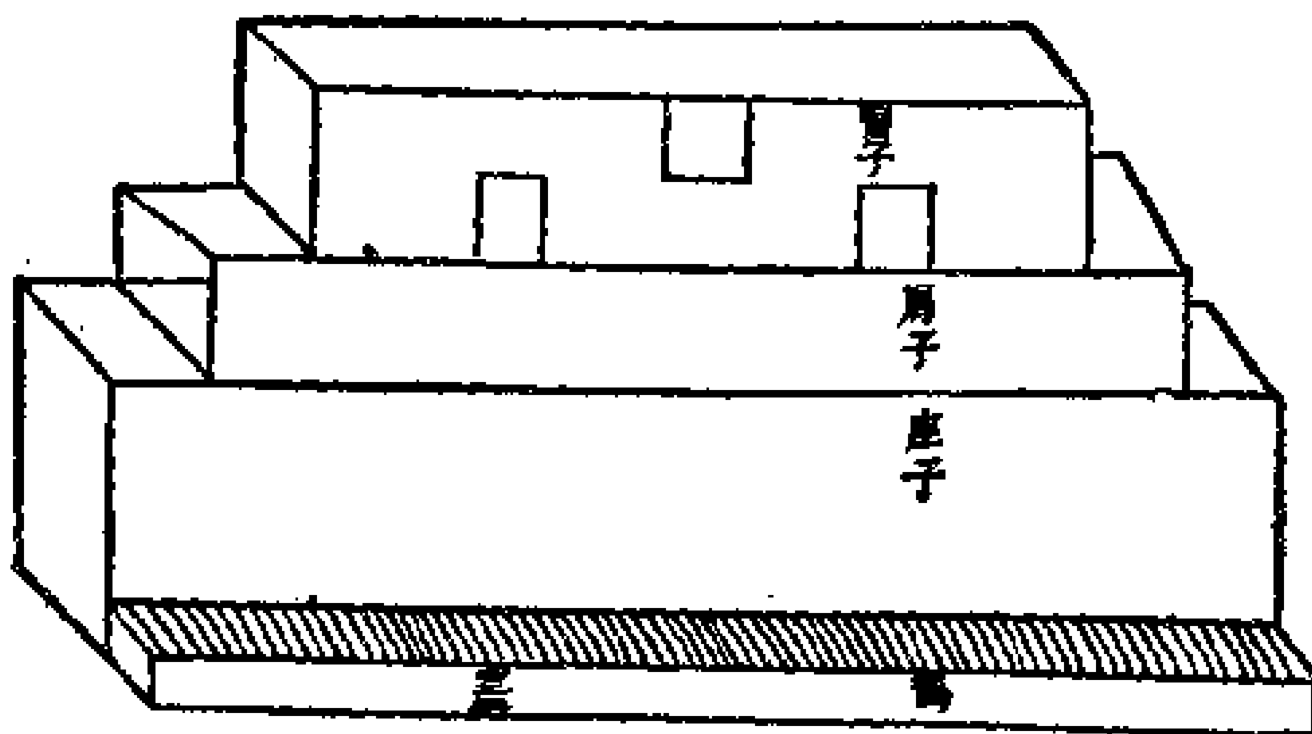


图37 女墙

支米，五万九十四石二斗五升.

术曰：以商功求之．置城及墙上下广，各并之，乘高，进位，半之，各得每丈积率．并之，为共率．先以每功尺除之，又以诸色工各数乘之，为土功丈率．次置柱木橛索，乘其每条段功，得各共功．次置城方一丈自之，乘用砖总幅数，为实．以砖长乘厚，为侧法，除实，得城身用砖．次置鹊台座子肩子帽子各高阔长相乘，为寄，并之于上．次以箭窗眼高低差寸，以乘眼数(原无"以乘眼数"一语)，求斜深虚积，减寄，余为女头砖实．以侧法乘砖阔，为砖积法．除之，得女头鹊台用砖．又置护崄墙高，以丈乘而半之，又乘上下幅共数，为实，以砖阔厚相乘为法，除之，得护崄墙用砖．并三项用砖，为都实．以每功片为法，除之，得砖匠功．以每丈用石段数，求石匠功．以搬每丈石，求搬石功．以片用灰数，乘都砖，得砖用灰．以每丈石版数，乘片用灰，得石用灰．并之，为砖石共交．以每功般灰数除之，得般灰工．并诸作功，为实．以火头濠寨每管人数，各为法，除之，得各数．又并之，为都功．然后以城围通长，遍乘诸项每丈率积灰各功料，得共数．

【新释】 设城上广为 a_1 尺，下广为 b_1 尺，高为 h_1 尺，则每丈城积率：

$$A_1=\frac{10(a_1+b_1)h_1}{2} \qquad (\alpha_1')$$

次设羊马墙上广为 a_2，下广为 b_2，高为 h_2，则每丈积率：

$$A_2=\frac{10(a_2+b_2)h_2}{2} \qquad (\alpha_2')$$

而每丈共积率：

$$A=A_1+A_2 \qquad (\alpha')$$

复设城围长为 L 丈，则

$$城积=LA_1 \qquad (\alpha_1)$$

$$羊马墙积=LA_2 \qquad (\alpha_2)$$

又设穿坚比率为 r，则

$$\text{濠积}=rLA \tag{α}$$

又设濠面阔为 a_3，底阔为 b_3，则

$$\text{濠深}=\frac{rA}{10(a_3+b_3)/2}=\frac{rA}{5(a_3+b_3)} \tag{β}$$

求土功：设镬手锹手担土杵手的功等率为 p，则每丈土功率：

$$B_1=\frac{4A}{p} \tag{γ_1}$$

求木功及芦竹等料：设每丈用永定柱 n_1 条，每条截埋功为 p_1，串凿功为 p_2，则永定柱每丈功率：

$$B_2=n_1(p_1+p_2) \tag{γ_2}$$

而共用

$$\text{永定柱}=n_1L \tag{δ_1}$$

次设每丈用爬头拽后木 n_2 条，每条作功为 p_3，串凿功为 p_4，则爬头拽后木每丈功率：

$$B_3=n_2(p_3+p_4) \tag{γ_3}$$

而共用

$$\text{爬头拽后木}=n_2L \tag{δ_2}$$

次设每丈用持子木 n_3 条，每条作功为 p_5，般加功为 p_6，则持子木每丈功率：

$$B_4=n_3(p_5+p_6) \tag{γ_4}$$

而共用

$$\text{持子木}=n_3L \tag{δ_3}$$

次设每丈用维橛 n_4 个，每个作功为 p_7，则维橛每丈功率：

$$B_5=n_4p_7 \tag{γ_5}$$

而共用

$$\text{维橛子}=n_4L \tag{δ_4}$$

次设每丈用维索 n_5 条，每条作功为 p_8，则维索每丈功率：

$$B_6 = n_5 p_8 \qquad (\gamma_6)$$

而共用

$$\text{维索} = n_5 L \qquad (\delta_5)$$

次设每丈用芦席 n_6 领，青茅 n_7 束，丝竿筀竹 n_8 条，芮子水竹 n_9 把，则得共用

$$\text{芦席} = n_6 L \qquad (\delta_6)$$

$$\text{青茅} = n_7 L \qquad (\delta_7)$$

$$\text{丝竿筀竹} = n_8 L^1 \qquad (\delta_8)$$

$$\text{芮子水竹} = n_9 L \qquad (\delta_9)$$

求砖功及料：设城身用砖，下一丈 k_1 幅，中一丈 k_2 幅，上一丈 k_3 幅，置城身一丈自乘，得 1 方丈 = 100 方尺 = 10000 方寸. 又设砖长为 l_1，阔为 l_2，厚为 l_3，则得城身每丈用砖：

$$C_1 = \frac{10000(k_1 + k_2 + k_3)}{l_1 l_3(\text{侧法})} \qquad (\delta_{101})$$

次设鹊台高为 H_1，长为 M_1，阔为 N_1；座子高为 H_2，长为 M_2，阔为 N_2；肩子高为 H_3，长为 M_3，阔为 N_3；帽子高为 H_4，长为 M_4，阔为 N_4；箭窗深为 H_5，长为 M_5，阔为 N_5，眼数为 m. 则得女头鹊台每丈用砖：

$$C_2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} H_i M_i N_i - m H_5 M_5 N_5}{l_1 l_2 l_3(\text{积法})} \qquad (\delta_{10_2})$$

又设护险墙高为 H，上半幅数为 k'_1，下半幅数为 k'_2，墙法为 t. 则护险墙每丈用砖：

$$C_3 = \frac{tH(k'_1 + k'_2)}{l_2 l_3(\text{平法})} \qquad (\delta_{10_3})$$

而共用砖

$$C = (C_1 + C_2 + C_3)L \qquad (\delta_{10})$$

又设砖匠每功可砌 n_{10} 片，则砖工每丈功率：

$$B_7=\frac{C_1+C_2+C_3}{n_{10}} \qquad (\gamma_7)$$

求石功及料：设每丈用石版 n_{11} 片，砌石 q_1 片为一功，搬石 q_2 片为一功．则石工每丈功率：

$$B_8=\frac{n_{11}}{q_1}+\frac{n_{11}}{q_2} \qquad (\gamma_8)$$

而共用

$$石版=n_{11}L \qquad (\delta_{11})$$

求灰功及料：设砖每片用灰 r_1 斤，石版每片用灰 r_2 斤，每工搬灰 S 斤．则得灰工每丈功率：

$$B_9=\frac{(C_1+C_2+C_3)r_1+n_{11}r_2}{S} \qquad (\gamma_9)$$

而共用

$$石灰=[(C_1+C_2+C_3)r_1+n_{11}r_2]L \qquad (\delta_{12})$$

其它功料：设火头一名，管理 t_1 工，部押濠寨一名，管理 t_2 工．则得火头每丈功率：

$$B_{10}=\frac{\sum_{i=1}^{9}B_i}{t_1} \qquad (\gamma_{10})$$

部押濠寨每丈功率：

$$B_{11}=\frac{\sum_{i=1}^{9}B_i}{t_2} \qquad (\gamma_{11})$$

而每丈共用功

$$B'=\sum_{i=1}^{11}B_i \qquad (\gamma')$$

(γ')式中收弃为整数．因得全工程总用功

$$B=B'L \qquad (\gamma)$$

次设每工日支新会 E_1 文，米 E_2 合．则得共用人工钱米

$$新会=BE_1 \qquad (\varepsilon)$$

$$工米 = BE_2 \qquad (\zeta)$$

【原草】 草曰：置城上广3丈，并下广7丈5尺，得10丈5尺，乘高3丈，得3150尺，进位，得31500尺，半之，得15750尺，为每丈城积率．次置羊马墙阔5尺，并下阔1丈，得15尺，乘高1丈，得150尺，进位，得1500尺，以半之，得750尺，为羊马墙每丈积率．并城墙二率，得16500尺，为共率，以为实，以镬锹担土杵手各60尺，为法．除实，得275功．以四色因之，得1100功，为镬锹担土杵手功．置永定柱20条，乘每条截埋功7分，得14功，又乘串凿功3分，得6功，计20功，为永定柱功．置爬头拽后木80条，乘作功3分，得24功，又乘串凿功2分，得16功，计40功，为爬头拽后木功．置持子木200条，乘作功2分，得40功．又乘般加功2分，得40功．计80功，为持子木功．置维橛2000个，乘作功8毫，得14功．维索2000条，乘作功9毫，得18功．计32功，为橛索共功．乃以城墙女头砖积，求砖匠功．置城身方1丈自乘，得100尺于上．次置下9幅中7幅上5幅并之，得21幅．乘上，得2100尺．砖长有寸，以寸通之，为21万寸，为实．以砖长12寸，乘厚2寸5分，得30寸，为侧法．除实，得7000片，为城身砖数．又置鹊台高5寸，乘阔5尺4寸，得270寸，又乘长1丈，得27000寸，寄上．又置座子高2尺2寸5分，乘阔3尺6寸，得810寸，又乘长1丈，得81000寸，加寄．又置肩子高1尺2寸5分，乘阔3尺6寸，得450寸，又乘长8尺4寸，得37800寸，又加寄，又置帽子高1尺5寸，乘阔3尺6寸，又乘长6尺6寸，得35640寸，又加寄．共得181440寸，共为寄．其箭窗内外眼，虽差3寸，于斜深虚积，将盈补亏，与真深等．以窗阔6寸，乘长7寸5分，得45寸，又乘座阔3尺6寸，得1620寸，以3眼乘之，得4860寸(原无"以3眼乘之，得4860寸"二语)，为窗虚积．以减寄，余176580寸(原为"余179820寸．")，为实，置砖侧法30寸，乘砖阔6寸，得180寸，为砖积法．除实，得981片(原为"999片"．按此修正结果，与宋景昌

所改正之结果同.），为女头鹊台共砖. 又置护崄墙高3尺，乘每丈，得3000寸，以墙法当半折之，得1500寸，又乘上下5幅，得7500寸，为实. 次以砖厚2寸5分，乘阔6寸，得15寸，为砖平(原无“平”字)法，除实，得500片，为护崄墙砖. 次并三项砖，得8481片(原为“得8499片.”)，为每丈用砖都实. 以每功700片为法，除实，得12功700分功之81(原为“得12功700分功之99.”)，为砖功. 每丈用石版10片，计1功. 搬石10片，计1功. 砖每片用灰1斤，命都砖，即砖用灰之数. 又置每丈用石版10片，每片用灰10斤，相乘之，得100斤，为石版用灰. 并砖用灰8481斤(原为“8499斤.”)，得8581斤(原为“得8599斤.”)，为砖石用灰数，为实. 以每功般1000斤，为法. 除之，得8功1000分功之581(原为“得8功1000分功之499”)，为般灰功. 并石匠般石2功，通前列土功1100，定柱功20，爬头拽后木功40，抟子木功80，橛索功32，砖功12功700分功之81(原为“砖功12功700分功之99”)，搬灰8功1000分功之581(原为“搬灰8功1000分功之499”)，石匠搬石共2功，并诸作功余不同者，合分术入之，共得1294功7000分功之4877(原为“共得1294功7000分功之1489.”)，通分内子，得9062877(原为得1295489.”)，为众功实. 置火头每管60人，分母乘之，得42万(原为“得6万”)为法. 除都功实，得火头21人42万分之242877(原为“得火头21人6万分之35489.”). 壕寨每部120人，就倍火头法42万为84万(原为“就倍火头法，6万为12万.”)，亦除众功实，得壕寨10人84万分之662877(原为“得壕寨10人12万分之95489”.)，列两余分，及前诸作功余7000分之4877(原为“余7000分之1489.”)三项，以合分术入之，得2(原为“1”)功. 不尽84万分之46371，在半以下，弃之(原为“不尽504000亿分之3023694000万分，求等，又约之，为84万分之503949分. 乃又并之，共得1326功. 其余分，大约100分中之59，在半以上，收为1功.”)，共定得1327功，为每丈都功. 然后以城通长，遍乘

诸项，置城长1510丈，乘城率15750尺，得23782500尺，为城坚积．又以城长乘墙率750尺，得1132500尺，为墙坚积．并墙城二积，得24915000尺，又以壖率4因之，得9966万尺，为实．以坚率3，约得3322万尺，为濠积，以为实．以濠阔30丈，并下阔25丈，得55丈，以半之，得275尺，乘濠长1510丈，得4152500尺（原为"得415250尺．"）为濠法．除实，得8尺（原为"8丈"．按此修正结果，亦与宋景昌改正者同．），为濠深．

求功料共数，如术，以城通长，遍乘丈率功永定柱爬头拽后木抟子木橛子木维索芦席箠竹水竹青茅城砖石版石灰，各得．以共功．乘日支钱米，得共钱米．更不立草．

【新释】 已知：$a_1=30$ 尺，$b_1=75$ 尺，$h_1=30$ 尺，代入(α_1')式，得

$$A_1=\frac{10(30+75)\times30}{2}=15750\ 尺.$$

次知：$a_2=5$ 尺，$b_2=10$ 尺，$h_2=10$ 尺．由(α_2')式，得

$$A_2=\frac{10(5+10)\times10}{2}=750\ 尺.$$

由(α')式，得每丈共积率

$$A=15750+750=16500\ 尺.$$

次知：$L=1510$ 丈，由(α_1)式，得

$$城积=1510\times15750=23782500\ 尺.$$

由(α_2)式，得

$$羊马墙积=1510\times750=1132500\ 尺.$$

又知：穿坚比率：$t=\frac{4}{3}$，由(α_3)式，得

$$濠积=\frac{4}{3}(23782500+1132500)$$

$$=\frac{4}{3}\times24915000=33220000\ 尺.$$

次知：$a_3=300$ 尺，$b_3=250$ 尺，由(β)式，得

$$濠深=\frac{\frac{4}{3}\times 16500}{5(300+250)}=\frac{22000}{2750}=8\text{ 尺}.$$

求土功：已知四种土功等功率，$p=60$ 尺，代入(γ_1)式，得每丈土功率：

$$B_1=\frac{4\times 16500}{60}=1100\text{ 功}.$$

求木功及芦竹等料：已知 $n_1=20$，$p_1=0.7$，$p_2=0.3$，由(γ_2)式，得每丈永定柱功率：

$$B_2=20(0.7+0.3)=20\text{ 功}.$$

由(δ_1)式，得共用

$$永定柱=20\times 1510=30200\text{ 条}.$$

复知：$n_2=80$ 条，$p_3=0.3$，$p_4=0.2$，由(γ_3)式，得

$$B_3=80(0.3+0.2)=40\text{ 功}.$$

由(δ_2)式，得共用

$$爬头拽后木=80\times 1510=120800\text{ 条}.$$

又知：$n_3=200$ 条，$p_5=p_6=0.2$，由(γ_4)式，得

$$B_4=200(0.2+0.2)=80\text{ 功}.$$

由(δ_3)式，得共用

$$抟子木=200\times 1510=302000\text{ 条}.$$

次知：$n_4=2000$ 个，$p_7=0.007$，由(γ_5)式，得

$$B_5=2000\times 0.007=14\text{ 功}.$$

由(δ_4)式，得共用

$$维橛=2000\times 1510=3020000\text{ 个}.$$

次知：$n_5=2000$ 条，$p_8=0.009$，由(γ_6)式，得

$$B_6=2000\times 0.009=18\text{ 功}.$$

由(δ_5)式，得共用

$$维索=2000\times 1510=3020000\text{ 条}.$$

又知：$n_6=150$ 领，$n_7=500$ 束，$n_8=50$ 竿，$n_9=10$ 把，由(δ_6)

至(δ_9)各式，得共用

$$芦席=150\times1510=226500 领,$$

$$青茅=500\times150=755000 束,$$

$$丝竿筀竹=50\times1510=75500 竿,$$

$$芮子水竹=10\times1510=15100 把.$$

求砖功及料：已知：$k_1=9$ 幅，$k_2=7$ 幅，$k_3=5$ 幅，$l_1=1.2$ 尺，$l_2=0.6$ 尺，$l_3=0.25$ 尺．由(δ_{10_1})式，得城身每丈（=100 平方尺）用砖：

$$C_1=\frac{100(9+7+5)}{1.2\times0.25}=\frac{2100}{0.3}=7000 片.$$

又知：$H_1=0.5$ 尺，$M_1=10$ 尺，$N_1=5.4$ 尺；$H_2=2.25$ 尺，$M_2=10$ 尺，$N_2=3.6$ 尺；$H_3=1.25$ 尺，$M_3=8.4$ 尺，$N_3=3.6$ 尺；$H_4=1.5$ 尺，$M_4=6.6$ 尺，$N_4=3.6$ 尺；$H_5=3.6$ 尺，$M_5=0.75$ 尺，$N_5=0.6$ 尺，$m=3$．代入(δ_{10_2})式，得女头鹊台用砖：

$$C_2=\frac{\left\{\begin{array}{l}0.5\times10\times5.4+2.25\times10\times3.6+1.25\\ \quad\times8.4\times3.6+1.5\times6.6\times3.6-3\\ \quad\times3.6\times0.75\times0.6\end{array}\right.}{1.2\times0.6\times0.25}$$

$$=\frac{27+81+37.8+35.64-4.86}{0.18}=\frac{176.58}{0.18}$$

$$=981 片.$$

又知：$H=3$ 尺，$k_1'=2$ 幅，$k_2'=3$ 幅，$r=\frac{1}{2}$，由(δ_{10_3})式，得护险墙用砖：

$$C_3=\frac{\frac{1}{2}\times3(2+3)}{0.6\times0.25}=\frac{7.5}{0.15}=500 片.$$

由(δ_{10})式，得共用砖：

$$C=(7000+981+500)\times1510$$

$$=8481\times1510=12806310 片.$$

又知：$n_{10}=7000$ 片，由(γ_7)式，得每丈功率.

$$B_7=\frac{8481}{700}=12\frac{81}{700}\text{ 功.}$$

求石功及料：已知：$n_{11}=10$ 片，$q_1=10$，$q_2=10$，由(γ_8)式，得每丈功率：

$$B_8=\frac{10}{10}+\frac{10}{10}=2\text{ 功.}$$

由(δ_{11})式，得共用

$$\text{石版}=10\times1510=15100\text{ 片.}$$

求灰功及料：已知 $r_1=1$ 斤，$r_2=10$ 斤，$s=1000$ 斤，由(γ_9)式，得每丈功率：

$$B_9=\frac{1\times8481+10\times10}{1000}=\frac{8581}{1000}=8\frac{581}{1000}\text{ 功.}$$

由(δ_{12})式，得共用

$$\text{石灰}=8581\times1510=12957310\text{ 斤.}$$

求其它功料：已知 $t_1=60$ 名，$t_2=120$ 名，由(γ_{10})，(γ_{11})二式，得每丈管理功率：

$$B_{10}=\frac{1}{60}\left(1100+20+40+80+14+18+12\frac{81}{700}+2+8\frac{581}{1000}\right)$$

$$=\frac{1}{60}\times\left(1294\frac{4877}{7000}\right)=\frac{9062877}{420000}=21\frac{242877}{420000}\text{ 功.}$$

$$B_{11}=\frac{9062877}{2\times420000}=10\frac{662877}{840000}\text{ 功.}$$

由(γ')式，得每丈共用功：

$$B'=1294\frac{4877}{7000}+21\frac{242877}{420000}+10\frac{662877}{840000}$$

$$=1327\frac{46371}{840000}\doteq1327\text{ 功.}$$

由(γ)式，得全工程总用功：

$$B=1327\times1510=2003770\text{ 功.}$$

次知：$E_1=100$ 文，$E_2=25$ 合，由(ε)，(ζ)两式，得共用

新会 $=100\times2003770=200377000$ 文 $=200377$ 贯文，

工米 $=25\times2003770=50094250$ 合 $=50094$ 石 2 斗 5 升.

【注】 馆案语“题意掘土为濠以筑城，城身及羊马墙身积，即濠身积．语中未详羊马墙及濠周绕城外，当长于城周．题中未载距城尺数，城墙用砖包砌，当三面，题中只计一面，皆属疏漏…．然古商功之略，犹可见焉．…．”

56. 楼 橹 功 料

问筑城合盖楼橹六十处，每处一十间．护崄高四尺，长三丈，厚随砖长．卧牛木一十一条，行一丈六尺，径一尺一寸．搭脑木一十一条，长二丈，径一尺．看濠柱一十一条，长一丈六尺，径一尺二寸．副濠柱一十一条，长一丈五尺，径一尺二寸．挂甲柱一十一条，长一丈三尺，径一尺一寸．虎蹲柱一十一条，长七尺五寸，径一尺．仰艎板木四十五条，长一丈，径一尺二寸．平面板木三十五条，长一丈，径一尺二寸．串挂枋木七十三条，长五尺，径一尺．仰板四八砖，结砌三层，计六千片，每片用灰半斤，共用纸觔一百斤．墙砖长一尺六寸，阔六寸，厚二寸半，每片用灰一斤(原无“每片用灰一斤”一语)．中板瓦七千五百片，一尺钉八个，八寸钉二百七十个，五寸钉一百个，四寸钉五十个，丁环二十个，用工三百九十六人．欲知共用工料各几何？

答曰：卧牛木，六百六十条． 搭脑木，六百六十条．
看濠柱，六百六十条． 副濠柱，六百六十条．
挂甲柱，六百六十条． 虎蹲柱，六百六十条．
串挂枋，四千三百八十条． 仰板木，二千七百条．
平板木，二千一百条． 城砖，四万八千片．
四八砖，三十六万片． 石灰，二十二万八千斤．
纸觔，六千斤． 中板瓦，四十五万片．

丁环，一千二百个.　　一尺钉，四百八十个.

八寸钉，一万六千二百个.　　五寸钉，六千个.

四寸钉，三千个.　　用工，二万三千七百六十人.

术曰：以商功求之. 置墙高乘长得寸，为实，以砖阔乘厚，为法. 除之，得用砖及用灰. 以处数并乘诸工料，得总用工料.

【新释】 设合盖楼橹 m 处，每处各需卧牛木 n_1 条，搭脑木 n_2 条，看濠柱 n_3 条，副濠柱 n_4 条，挂甲柱 n_5 条，虎蹲柱 n_6 条，仰艎板木 n_7 条，平面板木 n_8 条，串挂枋木 n_9 条. 则共需

$$卧牛木 = mn_1 \qquad (\alpha_1)$$

$$搭脑木 = mn_2 \qquad (\alpha_2)$$

$$看濠柱 = mn_3 \qquad (\alpha_3)$$

$$副濠柱 = mn_4 \qquad (\alpha_4)$$

$$挂甲柱 = mn_5 \qquad (\alpha_5)$$

$$虎蹲柱 = mn_6 \qquad (\alpha_6)$$

$$仰艎板木 = mn_7 \qquad (\alpha_7)$$

$$平面板木 = mn_8 \qquad (\alpha_8)$$

$$串挂枋木 = mn_9 \qquad (\alpha_9)$$

次设每处护崄墙高为 a，墙长为 b，墙厚为 c，城砖阔为 a'，厚为 b'，长为 c'. 则共用

$$城砖 = \frac{mabc}{a'b'c'} \qquad (\beta)$$

又设每处各用四八砖 k_1 片，每片用灰 p_1 斤，城砖每片用灰 p_2 斤，则共用

$$四八砖 = mk_1 \qquad (\gamma)$$

$$石灰 = mk_1p_1 + \frac{mabcp_2}{a'b'c'} \qquad (\delta)$$

复设每处各用纸觔 k_2 升，中板瓦 k_3 片，一尺钉 k_4 个，八寸钉 k_5 个，五寸钉 k_6 个，四寸钉 k_7 个，丁环 k_8 个，人工 k_9 人. 则得共用

$$纸舶=mk_2 \quad (\varepsilon_1)$$

$$中板瓦=mk_3 \quad (\varepsilon_2)$$

$$一尺钉=mk_4 \quad (\varepsilon_3)$$

$$八寸钉=mk_5 \quad (\varepsilon_4)$$

$$五寸钉=mk_6 \quad (\varepsilon_5)$$

$$四寸钉=mk_7 \quad (\varepsilon_6)$$

$$丁环=mk_8 \quad (\varepsilon_7)$$

$$人工=mk_9 \quad (\varepsilon_8)$$

【原草】 草曰：置墙高4尺，通为40寸，置长3丈，通为300寸，相乘，得12000寸，为实．以砖阔6寸，乘厚2寸5分，得15寸，为法．除之，得800片，为墙砖，又为灰．并四八砖灰3000斤，共灰3800斤．乃以60处，遍乘总用工料，卧牛木，搭脑木、看濠木柱，副濠柱、挂甲柱、虎蹲、仰板木、平板木、串挂枋木、四八砖、城砖、石灰、纸觔、中板瓦、一尺钉、八寸钉、五寸钉、四寸钉、丁环、工数，得各项总数．在前．

【新释】：已知：$m=60$，$n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=n_6=11$，$n_7=45$，$n_8=35$，$n_9=73$．代入$(\alpha_i)$各式，得共需

卧牛木$=11\times60=660$条，

搭脑木$=660$条，

看濠柱$=660$条，

副濠柱$=660$条，

挂甲柱$=660$条，

虎蹲柱$=660$条，

仰艎板木$=60\times45=2700$条，

平面板木$=60\times35=2100$条，

串挂枋木$=60\times73=4380$条．

次知：$a=4$尺，$b=30$尺，$c=1.6$尺；$a'=0.6$尺，$b'=0.25$尺，$c'=1.6$尺．代入(β)式，得共用

$$城砖=\frac{60\times4\times30\times1.6}{0.6\times0.25\times1.6}=\frac{7200}{0.15}=48000\ 片.$$

又知：$k_1=6000$, $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=1$. 由(γ), (δ)二式，得共用

$$四八砖=60\times6000=360000\ 片,$$

$$石灰=360000\times\frac{1}{2}+48000\times1=228000\ 斤.$$

复知：$k_2=100$ 斤，$k_3=7500$ 斤，$k_4=8$ 个，$k_5=270$ 个，$k_6=100$ 个，$k_7=50$ 个，$k_8=20$ 个，$k_9=396$ 人．代入(ε_i)各式，得共用

$$纸觔=60\times100=6000\ 斤,$$
$$中板瓦=60\times7500=450000\ 片,$$
$$一尺钉=60\times8=480\ 个,$$
$$八寸钉=60\times270=16200\ 个,$$
$$五寸钉=60\times100=6000\ 个,$$
$$四寸钉=60\times50=3000\ 个,$$
$$丁环=60\times20=1200\ 个,$$
$$人工=60\times396=23760\ 人.$$

57．计造石坝

问创石坝一座，长三十丈，水深四丈二尺，全面阔三丈，石版每片长五尺，阔二尺，厚五寸，用灰一十斤．每层高二尺，趱阔一尺．石匠每工九片，般扛五片，用工四人．兼工般灰兼用，每工一百一十斤．火头每名管六十人，部押每名管一百二十人．所用石，须依原段，不许凿动．欲知坝下阔及用石并灰共工各几何？

答曰：坝下阔五丈，

石版一十万八百片，

石灰一百万八千斤，

用夫一十万三千五百二十八功一十一分功之八．

层高 ‖　面阔 ≡〇 尺　得 ⊥〇 尺　长 |||〇〇 尺

初率 |≐〇〇〇 尺　差 | 尺　高 ‖ 尺　长 |||〇〇 尺

次率 ⊥〇〇　石版长 ||||| 尺　石版阔 ‖ 尺　石版厚 〇≡ 尺

初率 |≐〇〇〇　次率 ⊤〇〇　法 ||||| 尺

初绩石 ≡⊤〇〇 片　次积片 |=〇　列右行

得 =| 层　深 ≡‖ 尺　每层 ‖ 尺

上位 ⊓◦⊤〇〇 片　初积片 ≡⊤〇〇　层 =|

层 =|　余 =〇　层 =|　减 |

得 ||||=〇　‖ 半法　得 ‖—〇　次积 |=〇 片

上位 ⊓◦⊤〇〇 片　‖◦‖〇〇 片　石版 —〇〇Ⅲ〇〇 片

上阔 ≡〇 尺　得 =〇 尺　余 =〇 层　差 | 尺

下阔𝍬〇尺 石版𝍩〇〇𝍧〇〇片 每工𝍨片 得𝍠𝍩𝍡〇〇功

石版𝍩〇〇𝍧〇〇片 扛𝍣人 实𝍬〇𝍫𝍡〇〇片 扛𝍣片

扛𝍧〇𝍥𝍬〇功 石𝍩〇〇𝍧〇〇片 灰𝍩〇斤 灰𝍠〇〇𝍰〇〇〇实斤

灰实𝍠〇〇𝍰〇〇〇 人担法𝍠𝍩〇斤

担灰𝍱𝍠𝍮𝍢功 子𝍦 母𝍩𝍠

上担功𝍱𝍠𝍮𝍢 子𝍦 母𝍩𝍠 石功𝍠𝍩𝍡〇〇 般功𝍧〇𝍥𝍬〇

共功𝍩〇𝍩〇〇𝍢 子𝍦 母𝍩𝍠

功实𝍠𝍩𝍠𝍩〇𝍣〇 火头一名𝍮〇 𝍩𝍠母

功实𝍠𝍩𝍠𝍩〇𝍫〇
火头𝍮𝍥〇功法

火头功𝍩𝍮𝍰𝍢
𝍡𝍥〇不尽
法𝍮𝍥〇
等𝍡〇

火头功𝍩𝍮𝍰𝍢
子𝍩𝍢
母𝍫𝍢

功𝍠𝍩𝍠𝍩〇𝍫〇
潒寨𝍩𝍢𝍪〇法

潒寨𝍧𝍫𝍠人
𝍧𝍪〇不尽
𝍩𝍢𝍪〇法
等𝍬〇

潒寨𝍧𝍫𝍠人
子𝍪𝍢
母𝍫𝍢

共功𝍩〇𝍩〇〇𝍢
子𝍯
母𝍩𝍠
火头功𝍩𝍮𝍰𝍢
子𝍩𝍢
母𝍫𝍢
潒寨𝍧𝍫𝍠
子𝍪𝍢
母𝍫𝍢
总功𝍩〇𝍫𝍧𝍪𝍦
子𝍪𝍣
母𝍫𝍢

三因共功母子
并此三项功得下功
母子又三约之为一十一分之八合问

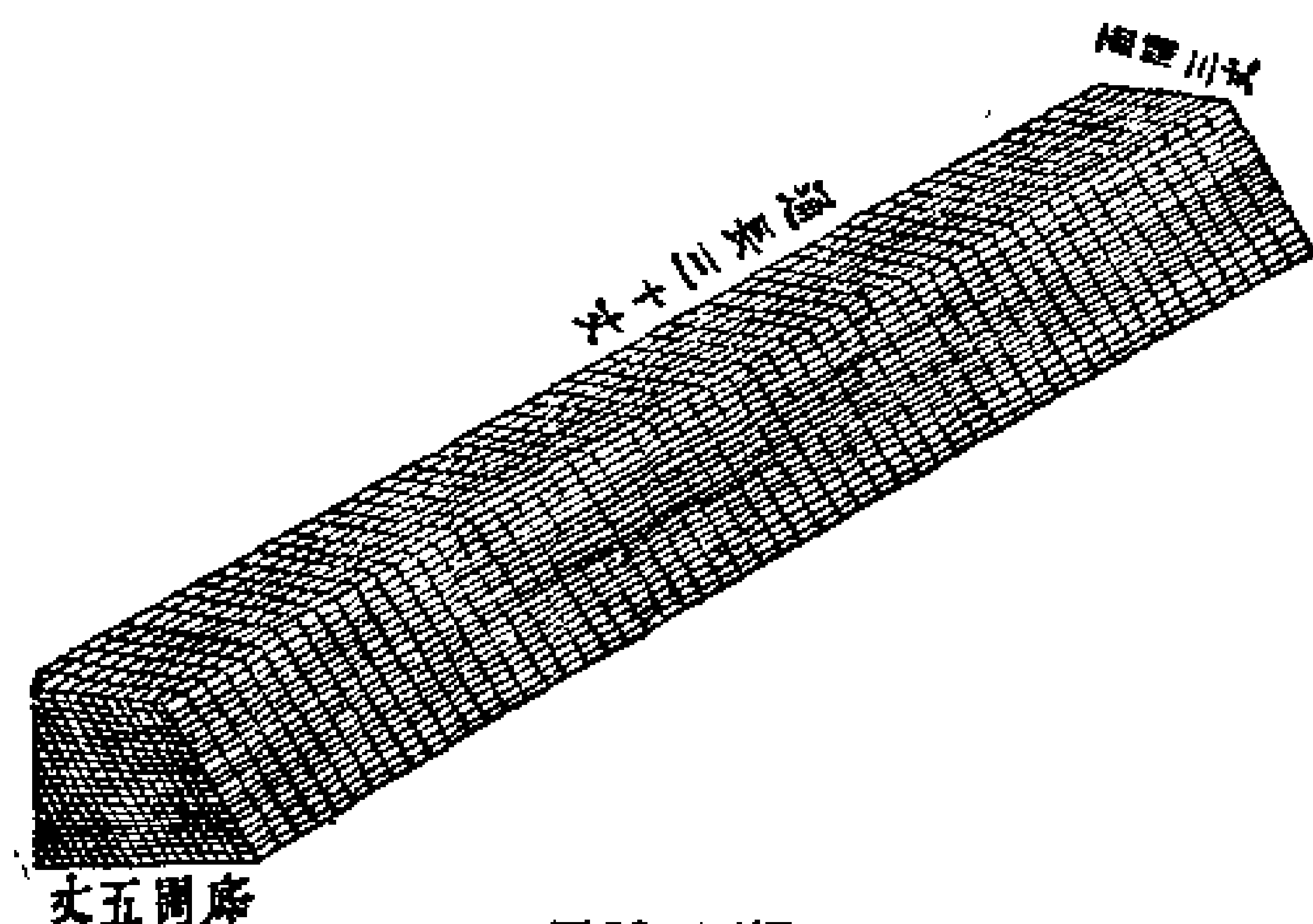


图38　石坝

术曰：以商功求之，招法入之．置层高尺数，乘面阔及长，为初率．次以差阔尺数，乘高，又乘长，为次率．却以石版长阔厚相乘，为法．以除二率，各得石版，为上积及次积．置深，以层高尺数约之，得层数．对二积列之一行，各添一拨天地数各以累乘对约之，得乘率．以对上次积，并之，为石版，以每片用灰乘石，为灰数．以匠功片数约版，得石匠．以般夫数乘石版，为实．以扛片数为法，除之，得人数．以般用灰数除灰，得人数，并诸工，以火头管数约之，为火头．半之，为部押．

【新释】　设石坝长为 a，面阔为 b，每层高为 h，差阔为 d，水深为 H，层数为 n．则得

$$n=\frac{H}{h} \tag{α}$$

又设石版每片长为 a'，阔为 b'，厚为 h'、则

第一层用石版：

$$A_1=\frac{abh}{a'b'h'} \tag{β}$$

第二层递增石版数:

$$A_2=\frac{adh}{a'b'h'} \qquad (\gamma)$$

由招差术的求和及求第 n 项的公式,得共用石版:

$$A=nA_1+\frac{n(n-1)}{2}A_2 \qquad (\delta)$$

而下阔

$$B=b+(n-1)d \qquad (\varepsilon)$$

次设石版每片用灰 k 斤,则共用

$$\text{石灰}=kA \qquad (\zeta)$$

又设每工置砌石版 p 片,般扛每工 q 片,灰工每功 r 斤. 则共用

$$\text{石工}=\frac{A}{p} \qquad (\eta_1)$$

$$\text{般工}=\frac{A}{q} \qquad (\eta_2)$$

$$\text{灰工}=\frac{kA}{r} \qquad (\eta_3)$$

复设火头每名管 m_1 人,部押每名管 m_2 人,则共需

$$\text{火头:}\ M_1=\left(\frac{A}{p}+\frac{A}{q}+\frac{kA}{r}\right)\Big/m_1 \qquad (\eta_4)$$

$$\text{部押:}\ M_2=\left(\frac{A}{p}+\frac{A}{q}+\frac{kA}{r}\right)\Big/m_2 \qquad (\eta_5)$$

而共用工:

$$M=\frac{A}{p}+\frac{A}{q}+\frac{kA}{r}+M_1+M_2 \qquad (\eta)$$

【原草】 草曰:层高 2 尺面阔 3 丈相乘,得 60 尺,又乘长 30 丈,得 18000 尺,为初率. 次以差阔 1 尺,乘高 2 尺,又乘长 30 丈,得 600 尺,为次率. 却以石版长 5 尺阔 2 尺厚 5 寸相乘,得 5 尺为法. 以除二率,得 3600 片为初积,120 片为次积,列右行. 置深 4

丈2尺,以每层2尺约之,得21层,乘初积3600片,得75600片于上. 次置21层,减1,余20,以乘21层,得420,半之,得210,乘次积120片,得25200片,加入上,共得100800片, 为石版数. 次置21层,减去一,余20,以差阔1尺乘之,得2丈,并上阔3丈, 共得5丈, 为下阔之数. 又置石版100800片, 以每功9约, 得11200功. 置石版数,以般扛4人乘之,得403200,为实,以5片为法, 除之,得80640工. 又置石版数,以每片用灰10斤乘之, 得1008000斤,为灰实. 以每人担,用110斤约之,得9163功11分功之7, 为灰工于上. 又并石版工11200,及并般扛工80640功, 加上、共得101003功11分功之7,通分内子,得1111040, 为实. 置火头每名管60名功,以乘分母11,得660,为法. 除实, 得1683功, 不尽260,与法约之,为33分功之13,为火头功数. 半之, 得841功33分功之23,为部押濠数. 今众功下11分之7,以母11除火头分母33,得3,以3因众功下母子,为101003功33分功之21,并三项母子,得103527功. 分子57,满母33,收1功. 余24, 与母各3约,为11分功之8. 为共用103528功11分功之8.

【新释】 已知: $a=30$丈,$b=3$丈,$h=2$尺, $d=1$尺, $H=42$尺,$a'=5$尺,$b'=2$尺,$h'=0.5$尺. 由(α)式,得

$$n=\frac{42}{2}=21\text{层}.$$

由(β), (γ)二式,得

$$A_1=\frac{300\times30\times2}{5\times2\times0.5}=\frac{18000}{5}=3600\text{片},$$

$$A_2=\frac{300\times1\times2}{5}=120\text{片}.$$

由(δ)式,得共用石版:

$$A=21\times3600+\frac{21\times20}{2}\times120=75600+25200$$

$$=100800\text{片}.$$

由(ε)式,得下阔:

$$B=30+20\times1=50\text{ 尺}=5\text{ 丈}.$$

次知,$k=10$ 斤,由(ζ)式,得共用

$$\text{石灰}=10\times100800=1008000\text{ 斤}.$$

又知:$p=9$ 片,$q=\frac{5}{4}$ 片,$r=110$ 斤. 由(η_1)至(η_3)各式,得共用

$$\text{石工}=\frac{100800}{9}=11200\text{ 功},$$

$$\text{般工}=\frac{100800}{5/4}=\frac{403200}{5}=80640\text{ 功},$$

$$\text{灰工}=\frac{10\times100800}{110}=\frac{1008000}{110}=9163\frac{7}{11}\text{ 功}.$$

复知:$m_1=60$, $m_2=120$,由(η_4),(η_5)二式,得

$$M_1=\frac{11200+80640+9163\frac{7}{11}}{60}=\frac{1111040}{660}$$

$$=1683\frac{13}{33}\text{ 功},$$

$$M_2=\frac{1111040}{2\times660}=\frac{1111040}{1320}=841\frac{23}{33}\text{ 功}.$$

由(η)式,得共用工:

$$M=101003\frac{7}{11}+1683\frac{13}{33}+841\frac{23}{33}$$

$$=103527+\left(\frac{21+13+23}{33}\right)=103528\frac{8}{11}\text{ 功}.$$

58. 计浚河渠

问开通运河,就土筑堤. 令面广六丈,底广四丈,上流深八尺,下流深一丈六尺,长四十八里. 其堤下广二丈四尺,上广一丈八尺,长与河等,未知高. 以墟四坚三为率,秋程人功,每名自开运积

筑墟坚,共积常六十尺. 筑堤至半,为棚道取土,上下功减五分之一,限一月毕. 欲知河积及堤积尺,共用功并日役工数,及堤高,各几何?

答曰:河积,六千二百二十万八千尺.

堤积,四千六百六十五万六千尺.

堤高,二丈一尺七分尺之三.

共用功,二百四万一千二百(原答:二十四万四千九百四十四).

日役工,六万八千四十(原答:八千一百六十四,五分工之四).

【注 1】 以常理论之,运河筑堤,应就两岸筑之,本问仅筑一岸之堤,虽于常情未合,吾人"即问以明使用土方之理"可已.

【注 2】 共用功及日役工的修正数字,与宋景昌所改正者相同,而所用公式的形式则稍异.

术曰:以商功求之. 并河上下广于上,并河上下流深,乘之,又以长乘,为实. 以四为法,除得河积. 以坚率乘河积,为实. 以墟率为法,除得堤积. 并堤上下广,乘堤长,半之,为法. 除堤积,得堤高. 并河堤二积(此处原有"以棚道母"四字),半之,(此处原有"副置,以棚道减功子乘之,以棚道减功母除之,得数。以并其副,共"诸字句、)为寄. 以子减母,余乘常尺,为增子,以母乘常尺,为增分. 并增分增子,乘寄,(此处原有"半"字)为用工实. 以增分乘增子,以母除之(原无"以母除之"一语),又乘限月日为法,除实,得用工人数.

【新释】 设河上广为 a_1, 下广为 a_2, 上流深为 d_1, 下流深为 d_2, 流长为 l, 则河积的近似值:

$$A_1=\frac{(a_1+a_2)(d_1+d_2)l}{4} \qquad (\alpha)$$

又设坚率为 p, 墟率为 q, 则堤积

$$A_2=\frac{pA_1}{q} \tag{β}$$

次设堤上广为 b_1，下广为 b_2，则堤高

$$H=\frac{A_2}{\frac{1}{2}(b_1+b_2)l} \tag{γ}$$

复设筑堤至半，减功率为 $\frac{r}{s}$，秋程人功，共积常尺为 k，限日 t。为则每日役工人数：

$$N=\left[\frac{\frac{1}{2}(A_1+A_2)}{k}+\frac{\frac{1}{2}(A_1+A_2)}{\left(1-\frac{r}{s}\right)k}\right]\Big/t$$

$$=\frac{\left(1-\frac{r}{s}\right)\cdot k\cdot\frac{A_1+A_2}{2}+k\cdot\frac{A_1+A_2}{2}}{k\left(1-\frac{r}{s}\right)kt}$$

$$=\frac{(s-r)\cdot k\cdot\frac{A_1+A_2}{2}+sk\frac{A_1+A_2}{2}}{sk\cdot\frac{s-r}{s}\cdot kt}$$

$$=\frac{[(s-r)k+sk]\frac{A_1+A_2}{2}}{\frac{sk(s-r)k}{s}\cdot t} \tag{δ}$$

而

$$\text{共用}I=tN \tag{ε}$$

【原草】 草曰：置河上广 6 丈，并底广 4 丈，通之折半，得 50 尺于上．又置河上流深 8 尺，并下流深 1 丈 6 尺，并之，折半，得 12 尺，以乘上位，得 600 尺为次．置长 48 里，以尺里法 2160 通之，得 103680 尺，得堤河长．以乘次，得 62208000 尺，为河积．以坚率 3，因河积，得 186624000 尺，为实．以穿率 4 为法，除之，得

46656000 尺，为堤积. 置上广 1 丈 8 尺，下广 2 丈 4 尺，并之，为 42 尺，以乘堤长 103680 尺，得 4354560 尺，以半之，得 2177280 尺，为法. 除堤积，得 21 尺，为堤高. 不尽 933120，与法求等，得 311040，俱约之，为 7 分尺之 3. 次置河积 62208000 尺，并堤积 46656000 尺，得 108864000 尺，以棚道筑至半，是 2 除之，得 54432000 尺，(此处原有"副之，先以减功之子 1 乘之，只得此数，为实. 乃后以减功母 5 为法，除之，得 10886400 尺，并副 54432000 尺，共得 65318400 尺."诸语.)为寄. 以折减功 5 分之 1，以子 1 减母 5，余 4，以乘常尺 60，得 240 尺，为增子. 以母 5 乘常尺 60，得 300 尺，为增分. 以二增并之，得 540，乘寄，得 29393280000 尺(原为"得 35271936000 尺. 以半之，得 17635968000 尺.")，为用工实. 以增分 300 乘增子 240，得 72000 尺，以母 5 除之，得 14400 尺(原无"以母 5 除之，得 14400 尺". 二语)，又乘限分日 30，得 432000 尺(原为"得 216 万尺.")，为法. 除前用工实，得 68040(原为"得 8164")，为每日人工数. (此处原有"不尽 1728000，与法求等，得 432000，俱约之. 为 5 分工之 4. 得每日用工 8164 功 5 分工之 4. 复通分因子，得 48024"诸语.)，以 30 日乘之，得 2041200 (原为"得 1224720，为实. 仍以母 5 约之，得 244944 工.")为共用工. 合问.

【新释】 已知：$a_1=60$ 尺，$a_2=40$ 尺，$d_1=8$ 尺，$d_2=16$ 尺，$l=$ 48 里 $=48\times2160$ 尺 $=103680$ 尺. 代入(α)式，得河积的近似值：

$$A_1=\frac{(60+40)(8+16)\times103680}{4}=\frac{100}{2}\times\frac{24}{2}\times103680$$
$$=50\times12\times103680=62208000\text{ 尺}.$$

又知：$p=3$，$q=4$，由(β)式，得堤积：

$$A_2=\frac{3\times62208000}{4}=\frac{186624000}{4}=46656000\text{ 尺}.$$

次知：$b_1=18$ 尺，$b_2=24$ 尺，由(γ)式，得堤高

$$H=\frac{46656000}{\frac{1}{2}(18+24)\times103680}=\frac{46656000}{2177280}$$

$$=21\frac{933120}{2177280}=21\frac{3}{7}\text{ 尺.}$$

复知：筑堤至半减功率：$\frac{r}{s}=\frac{1}{5}$，$h=60$ 尺，$t=30$ 日，由(δ)式，得每日役工人数：

$$N=\frac{[(5-1)\times60+5\times60]\frac{62208000+46656000}{2}}{\frac{5\times60\times(5-1)\times60}{5}\times30}$$

$$=\frac{540\times54432000}{14400\times30}=\frac{29393280000}{432000}=68040\text{ 人.}$$

由(ε)式，得

$$\text{共用工}=30\times68040=2041200\text{ 人.}$$

第十四卷　凡　五　问

59. 计 作 清 台

问创筑清台一所，正高一十二丈，上广五丈，袤七丈，下广一十五丈，袤一十七丈，其袤当东西，广当南北．秋程，人日行六十里，里法三百六十步．钁土锹土，每工各二百尺．筑土，每功九十尺．每担土壤一尺三寸，往柬一百六十步，内四十步，上下棚道，筑高至少半，其棚三当平道五，至中半，三当七，至大半，二当五，踟蹰之间，十加一，载输之间，二十步定一返．今甲乙丙三县差夫，甲县附郭，税力一十三万三千八百六十六．乙县去台所一百二十里，税力二十三万七千九百八十四．丙县去台一百八十里，税力三十一万二千三百五十四．俱以道里远近，税力多少，均科之．台下铺石脚七层，先用砖包砌台身，厚六尺，铺砌台面，厚六寸(原无"厚六尺，

铺砌台面，厚六寸"诸语）．次用砖叠砌转道，周围五带，并阔六尺，须令南北二平道，东西三峻道相间，始自台之艮隅，于东外道向南顺升，由巽隅以西右转（原为"左转"），周回历北复东，再升东里道，至巽隅乃登台顶．其东里道艮隅，与北平道两隅及西道乾隅之高，皆以强半．其西道坤隅，与南道两隅，东外道巽隅之高，皆以五分之二．峻道每级履高六寸，其东里道级数，取弱半，东外道级数，取五分之二，西道级数，取强半．石长五尺，阔二尺，厚五寸．砖长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分．欲知土积，定一返步，每功人到土，及总用功，各县起夫，砖石，峻平道，高长级数，踏纵，各几何？

答曰：土积，一百五十四万尺．

定一返，二百三十二步三分步之二（原答：二百步一十八分步之五．）

每功人到土，一百二十尺三百四十九分尺之二百四十（原答：一百四十尺，七百二十一分尺之一百四十八．）．

总用功，五万八千九百一十二功（原答：四万五千六百八十六功．）．

甲县差二万二千九十二功（原答：一万七千一百三十二功．），

乙县差一万九千六百三十七功（原答：一万五千二百二十九功．），

丙县差一万七千一百八十三功（原答：一万三千三百二十五功．）．

石，三千四十片（原答：四千三百一十七片．）．

砖，三百四十四万七千二百八十一片（原答：三百一十四万二千二十四片．）．

东里道峻

艮隅高，九丈，

巽隅高，一十二丈六寸（原答：一十一丈九尺四寸．），

级，五十一踏（原答：五十踏．），

踏纵，一尺四寸三十四分寸之一十九(原答：二尺二寸九分.).

东外道峻

艮隅高，六寸，

巽隅高，四丈八尺，

级，八十踏，

踏纵，一尺七寸四分寸之三(原答：二尺一寸五分).

西峻道

坤隅高，四丈八尺，

乾隅高，九丈，

级，七十踏，

踏纵，一尺四寸一十四分寸之一十三(原答：二尺一十四分寸之九.).

南平道高，四丈八尺.

北平道高，九丈.

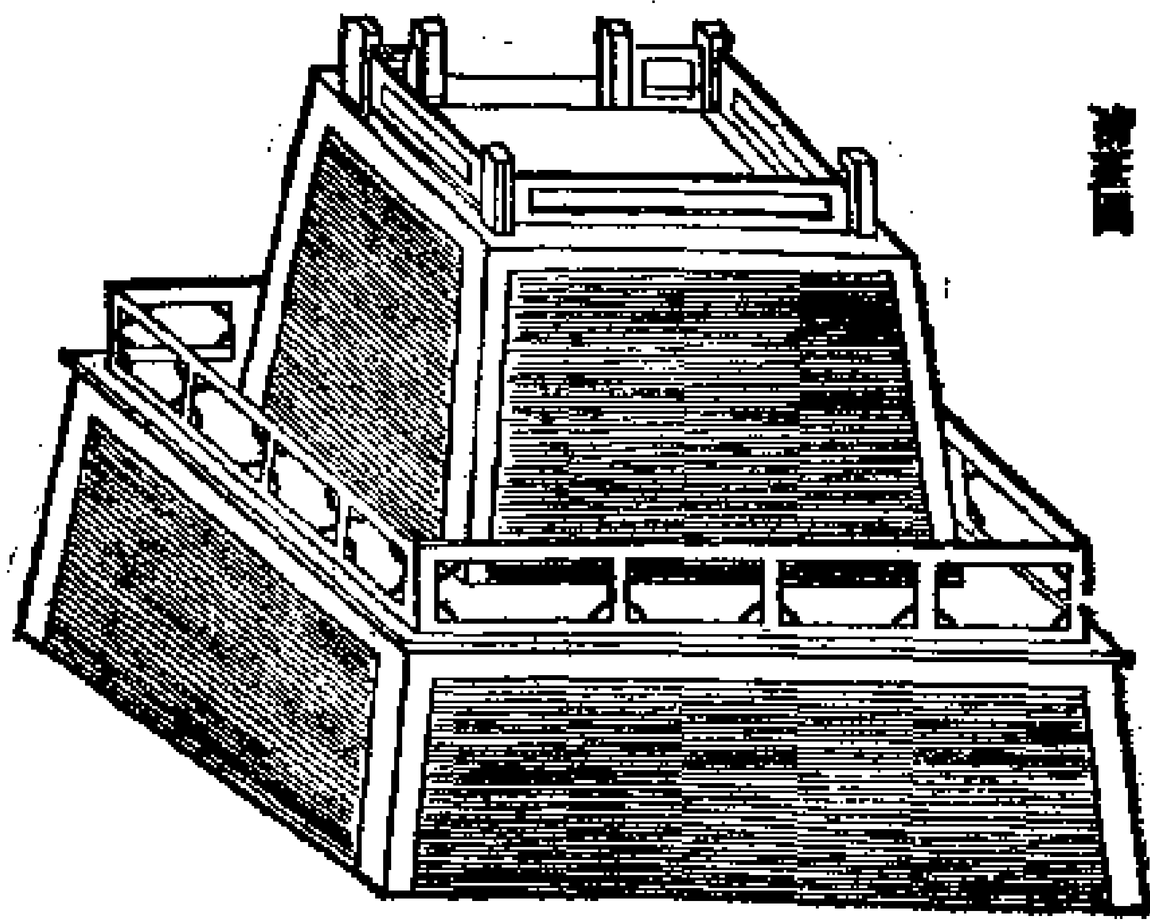


图39　清台

术曰：以商功求之，均输入之．倍台上袤，加下袤，乘上广，为寄．倍下袤，加上袤，乘下广，并寄．乘高，为土率．如六而一，得坚积．以筑功尺，为法．除坚积，得筑功．以穿率乘坚积，为实．以坚率乘镬锹功尺，半之，为锹法．除实，得镬锹共功．以壤率因坚积，如坚率而一，为壤积．求负土者，先列筑至高诸母子，后列全分，递次以下减上，得次(原为"先列全分，及等至高诸母子．")．以母互乘诸子，为寄左行．以诸母相乘，为寄母．次列棚道全分，及所当鲜母衍子，以鲜母互乘衍子，为左行．以鲜母相乘，以乘寄母(原为"以乘寄得数，又以列位乘之．")，为总母．以左右两行诸子对乘之，并之，为总子．其总母子，求等约之，为定母子．以定子乘棚道，为次．以定母乘平道，加次，又以踟蹰之数，身下加之，又以载输步，乘定母，并次，为统数．以定母除统数，得定一返步，亦为到土法．有分，复通为法．置程里，通步，乘担土尺，有步母则又以步母乘之，为到实．实如法而一，得每功人到土，亦为壤法．以除壤积，得负土功．并前锹筑二功，为总用功．以各县日程数，约税力，各得力率，副并为科法．以共用功，乘未并者，各为科实．实如法而一，各得县夫．求砖者，倍包砌砖厚(原为"转道阔")，遍加台上下广袤，变名上下阔长．以台面铺砌(原无"台面铺砌"四字．)砖厚加台高，为台直．次列砖石长阔厚，各相乘，为砖石积法．通广袤如法，乃倍上长，加下长，乘上阔，为寄．次倍下长，加上长，乘下阔，并寄，共乘直得数，减土率，余如六而一，为泛．置南北道高子，各乘台高，为实．如各母而一，得五道诸隅高．以北道高，减台高，余并铺砌砖厚(原无"并铺砌砖厚"诸字．)，为上停高．以南道高，减北道高，余为中停高．命南道高，为下停高．以履寸除诸高，得级数．以上阔(原为"长")减下阔(原为"长")，余半之，为句．以句乘南道高，为实．如台高而一，得底率．以底率减下阔(原为"长")，余为底股．以外道级数约底股，得外道踏纵(此处原有"又以底数减底股，余为中股．"二语)．以句乘中停高，为实．如台高而一，得

中率(此处原有"以率减中股,余为上股. 以西道级除上股,得西道踏纵"诸语.). 以句乘上停高,为实. 如台高而一, 得上率. 乃以中率并底率,减底股,余为中股. 以西道级数约之,得西道踏纵. 又以上率并中率,减中股,余为上股,以为实(原无"乃以中率并底率,…. 余为上股,以为实."诸语, 此处原为"以上率并中率, 共减上股,余为实."诸语). 如里道级而一, 得里道踏纵. 次以上停高乘中停高,并中停高乘下停高,又加下停高乘上停高, 以上阔减下阔乘之,为实. 如台高而一,得数,减下阔乘台直,为补,三因道阔,并下长,又加下阔于上. 倍底率,减上,余乘南道高, 倍之, 为需. 倍道阔,并下长,又加下阔于次. 上阔减下阔,余乘北道高,为实. 如台高而一,得数,减次,余乘北道高,又倍之,为寄. 倍道阔,以北道高减台直乘之,得数,并补加需,又并寄. 复以半道阔乘之,为叠砌积. 并泛,为砖石共率(原为"次以道阔并下长为补. 以南北道高,并台高,乘补,为需. 次上广减下广, 余为址. 以址乘南道高, 为实. 以台高除之,得数,减下广,余为南道长. 以南道长并下广,乘南道高,加需,又以址乘北道高,为实. 以台高除之,得数,减下广,余为北道长. 以北道长并下广,乘北道高,又加需,共乘半道阔,得数,并泛,为共率."). 以基脚层数, 乘石版厚, 为基高. 次以三因道阔并下长,以下阔并倍道阔乘之(原为"次倍道阔, 并下阔, 乘下长."),为基率. 次下以下长并道阔, 乘下阔(原为"次下以下广乘下袤."),减基率,余乘基高,为石率. 以石率减共率,余为砖率. 以砖积法除砖率,得砖数. 以石版积法除石率,得石版数.

【新释】 求土积土功及各县差夫:

设台上袤为 a_1, 下袤为 a_2, 上广为 b_1, 下广为 b_2, 高为 H, 则土积(坚积)为:

$$v=\frac{1}{6}[(2a_1+a_2)b_1+(a_1+2a_2)b_2]H \qquad (\alpha)$$

次设筑土每功 p_1 尺, 镘土锹土等功率每工 p_2 尺, 坚率为 q_1,

穿率为 q_2，则共用

$$\text{筑工：} N_1=\frac{v}{p_1} \qquad (\beta_1)$$

$$\text{镬锹共功：} N_2=\frac{q_2 v}{q_1 p_2/2} \qquad (\beta_2)$$

次设秋程人功每日 l 里，担土往来 k 步，内有上下棚道 k_1 步，平道 $k_2=k-k_1$ 步，筑高至 $\frac{r_1'}{r_1}$ 时，其棚道步率为 $\frac{s_1'}{s_1}$，筑高至 $\frac{r_2'}{r_2}$ 时，其棚道步率为 $\frac{s_2'}{s_2}$，筑高至 $\frac{r_3'}{r_3}$ 时，其棚道步率为 $\frac{s_3'}{s_3}$。且其步率在每段筑高之间，递增 $\frac{t'}{t}$，因载输关系，每一返定为 k' 步。每担土壤为 p_2 尺，壤率为 q_3，则得定一返步：

$$K=\left\{k_1\left[\frac{r_1'}{r_1}+\left(\frac{r_2'}{r_2}-\frac{r_1'}{r_1}\right)\frac{s_1'}{s_1}+\left(\frac{r_3'}{r_3}-\frac{r_2'}{r_2}\right)\frac{s_2'}{s_2}+\left(1-\frac{r_2'}{r_2}\right)\frac{s_3'}{s_3}\right]+k_2\right\}\left(1+\frac{t'}{t}\right)+k' \qquad (\beta_1')$$

而每功人到土因

$$v'=\frac{l p_3}{K} \qquad (\beta_2')$$

共用担土功为

$$N_3=\frac{q_3 v}{q_1 v'} \qquad (\beta_3)$$

而总用功为

$$N=N_1+N_2+N_3 \qquad (\beta)$$

又设甲县税力为 c_1，至台所行程为 d_1 日，乙县税力为 c_2，行程为 d_2 日，丙县税力为 c_3，行程为 d_3 日。因得各县应差夫：

$$\text{甲县}=\frac{c_1/d_1}{\Sigma c/d}\cdot N \qquad (\gamma_1)$$

$$\text{乙县}=\frac{c_2/d_2}{\Sigma c/d}\cdot N \qquad (\gamma_2)$$

$$丙省=\frac{c_3/d_3}{\Sigma c/d}\cdot N \qquad (\gamma_3)$$

求诸道高度级数踏纵及砖石：

设转道阔为 g，包砌砖厚为 f'，台面铺砌砖厚为 f，砖长为 f_1，阔为 f_2，厚为 f_3，石版长为 f'_1，阔为 f'_2，厚为 f'_3，则砖泛积：

$$v_1=\frac{1}{6}\{[2(a_1+2f')+(a_2+2f')](b_1+2f')$$
$$+[(a_1+2f')+2(a_2+2f')](b_2+2f')\}(H+f)-v \qquad (\delta)$$

$$砖积法=f_1f_2f_3 \qquad (\varepsilon_1)$$

$$石积法=f'_1f'_2f'_3 \qquad (\varepsilon_2)$$

次设南道高为台高的 $\frac{m'_1}{m_1}$，北道高为台高的 $\frac{m'_2}{m_2}$，则

$$南道高：Q_1=\frac{m'_1H}{m_1} \qquad (\zeta_1)$$

$$北道高：Q_2=\frac{m'_2H}{m_2} \qquad (\zeta_2)$$

复将台高分为三停，则

$$上停高：H_1=H-Q_2+f \qquad (\zeta_3)$$

$$中停高：H_2=Q_2-Q_1 \qquad (\zeta_4)$$

$$下停高：H_3=Q_1 \qquad (\zeta_5)$$

又设履级寸为 α，则

$$东里道级数：R_1=\frac{H_1}{\alpha} \qquad (\eta_1)$$

$$西道级数：R_2=\frac{H_2}{\alpha} \qquad (\eta_2)$$

$$东外道级数：R_3=\frac{H_3}{\alpha} \qquad (\eta_3)$$

外道踏纵：

$$T_1=\frac{(b_2+2f')-\left[\frac{(b_2+2f')-(b_1+2f')}{2}\cdot H_3\right]\Big/H}{R_3}$$

$$=\frac{(b_2+2f')-(b_2-b_1)H_3/2H}{R_3} \qquad (\theta_1)$$

西道踏纵:

$$T_2=\frac{1}{R_2}\left\{(b_2+2f')-\frac{(b_2-b_1)H_3}{2H}-\left[\frac{(b_2-b_1)H_3}{2H}+\frac{(b_2-b_1)H_2}{2H}\right]\right\}$$

$$=\frac{(b_2-2f')-(b_2-b_1)(Q_1+Q_2)/2H}{R_2} \qquad (\theta_2)$$

里道踏纵:

$$T_3=\frac{1}{R_1}\left\{(b_2+2f')-\frac{(b_2-b_1)(Q_1-Q_2)}{2H}-\left[\frac{(b_2-b_1)H_2}{2H}+\frac{(b_2-b_1)H_1}{2H}\right]\right\}$$

$$=\frac{(b_2+2f')-(b_2-b_1)(Q_2+H+f)/2H}{R_1} \qquad (\theta_3)$$

因得叠砌积:

$$\begin{aligned}v_2=\Bigg\{&(b_2+2f')H_3+\left[(b_2+2f')-\frac{(b_2-b_1)Q_1}{H}\right]H_2\\&+\left[(b_2+2f')-\frac{(b_2-b_1)Q_2}{H}\right]H_1\\&+\left[(a_2+2f'+3g)+\left(a_2+2f'+3g-\frac{(a_2-a_1)Q_1}{H}\right)\right.\\&\left.+(b_2+2f')+\left(b_2+2f'-\frac{(b_2-b_1)Q_1}{H}\right)\right]Q_1\\&+\left[(a_2+2f'+2g)+\left(a_2+2f'+2g-\frac{(a_2-a_1)Q_2}{H}\right)\right.\\&\left.+(b_2+2f')+\left(b_2+2f'-\frac{(b_2-b_1)Q_2}{H}\right)\right]Q_2\\&+2g(H-Q_2+f)\Bigg\}\cdot\frac{g}{2}.\end{aligned}$$

整理上式,且因 $a_2-a_1=b_2-b_1$(在本问的特殊情况下.),得

$$v_2=\frac{g}{2}\Big\{\Big[(b_2+2f')(H+f)-\frac{b_2-b_1}{H}(H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1)\Big]$$
$$+2\Big[(a_2+2f')+(b_2+2f')+3g-\frac{(b_2-b_1)Q_1}{H}\Big]Q_1$$
$$+2\Big[(a_2+2f')+(b_2+2f')+2g-\frac{(b_2-b_1)Q_2}{H}\Big]Q_2+2gH_1\Big\} \quad (\tau)$$

而砖石共率：

$$v_3=v_1+v_2 \quad (\varkappa)$$

又设石基层数为 n，则石率：

$$v_4=nf'_3[(a_2+2f'+3g)(b_2+2f'+2g)-(a_2+2f'+g)(b_2+2f')] \quad (\lambda)$$

而共需

$$砖=\frac{v_3-v_4}{f_1f_2f_3} \quad (\mu_1)$$

$$石版=\frac{v_4}{f'_1f'_2f'_3} \quad (\mu_2)$$

【注 1】 秦氏所给的(α)式，是应用了九章算术商功章的刍童体积公式：

$$v=\frac{1}{6}[(2a_1+a_2)b_1+(a_1+2a_2)b_2]H.$$

这个公式的正确性，业由刘徽注九章，算术时(263 年)给出证明了.

【注 2】 各县差夫中，砖石工不在内.

【注 3】 原问关于包砌砖厚并未提出，仅在草式中求砖积时，说到砖厚(系指台面铺砌厚度.)六寸，既系台高一十二丈，台身包砌应该较厚. 因此在原问中增加了包砌砖厚六尺，虽然这个数字，并不十分恰当，但对于原术原草来说，却可以保留很多文字.

【注 4】 按原术原草，各隅并未留出空隙与平道等高. 今在各隅均留以道阔平方的面积，以便转身之用，这样似乎觉得合理一

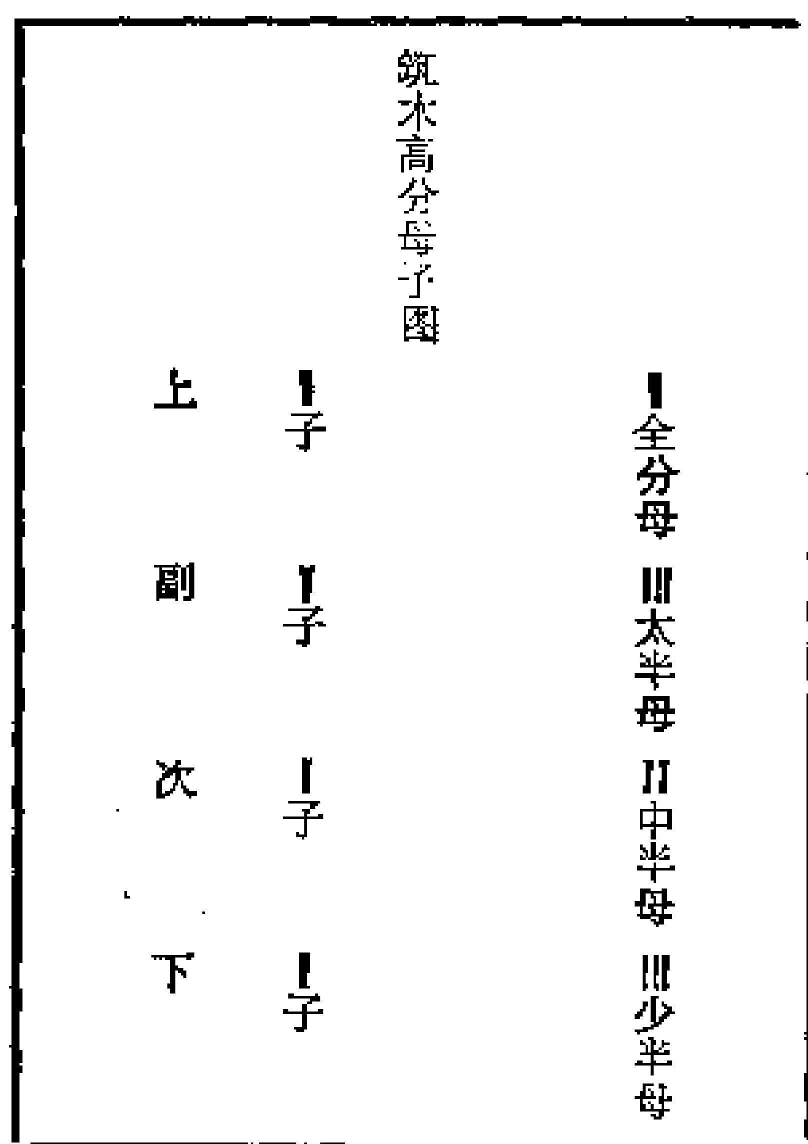
些.

【注 5】 定一返步数及每功入到土尺数的修正数字，与宋景昌所改正者相同. 关于镬锹共功，原术正确而原草错误，数书九章札记，亦疏于改正，因致后此各数，均与札记有所出入矣.

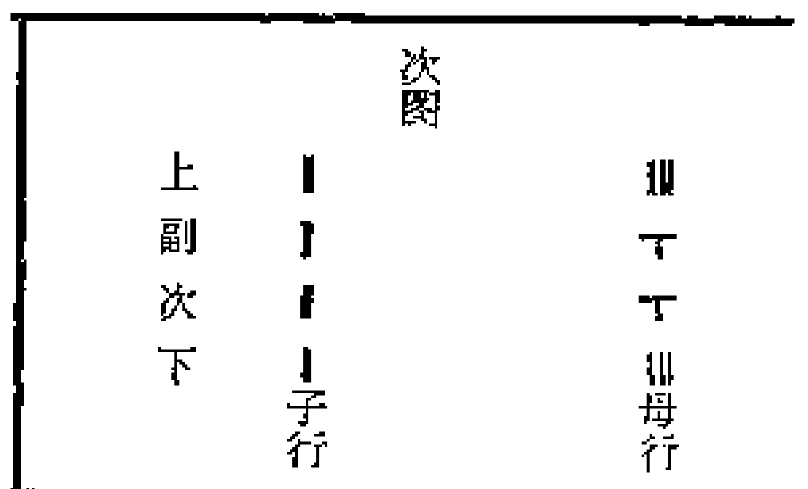
【原草】 草曰：倍上袤 7 丈，得 14，加下袤 17 丈，得 31，乘上广 5 丈，得 155 丈，为寄. 次倍下袤，得 34 丈，加上袤 7 丈，得 41，乘下广 15 丈，得 615，并寄，得 770，乘高 12 丈，得 9240 丈，为土率. 以 6 除，得 1540，以千尺通之. 为 154 万尺，为坚积. 以筑功 90 尺，除之，得 17111 功 9 分功之 1，为筑功. 次以穿率 4，因坚积，得 616 万尺，为实. 以坚率 3，因镬锹功 200 尺，得 600 尺，半之，得 300 尺(原无"半之，得 300 尺"二语.)，为法. 除实，得 20533 功 3 分功之一(原为"得 10266 功 3 分功之 2")，为穿功. 次以壤率 5，因坚积，得 770 万尺，为壤积，以 3 为母. 具图如后：

土功图	土积图
筑功	土率
子 母	丈
穿功	坚积
子 母	尺
	壤积
	尺
	壤 母

求负土者,先列(此处原有"全分1分之1")及筑至高少半,系3分之1,中半,系2分之1,太半,系3分之2,后列全分1分之1(原无"后列全分1分之1"),作两行.

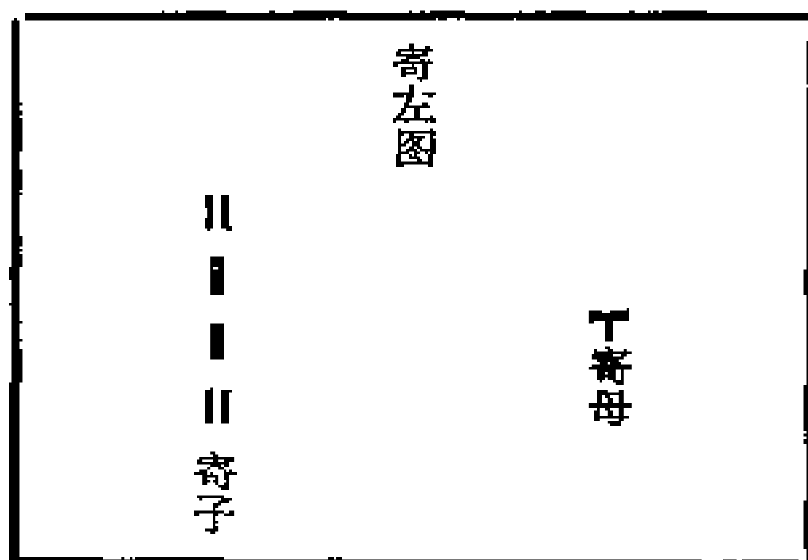


仍以3分之1为下,其余递次以下减次,以次减副,以副减上,得次图(原无本段叙述,亦无次图.):

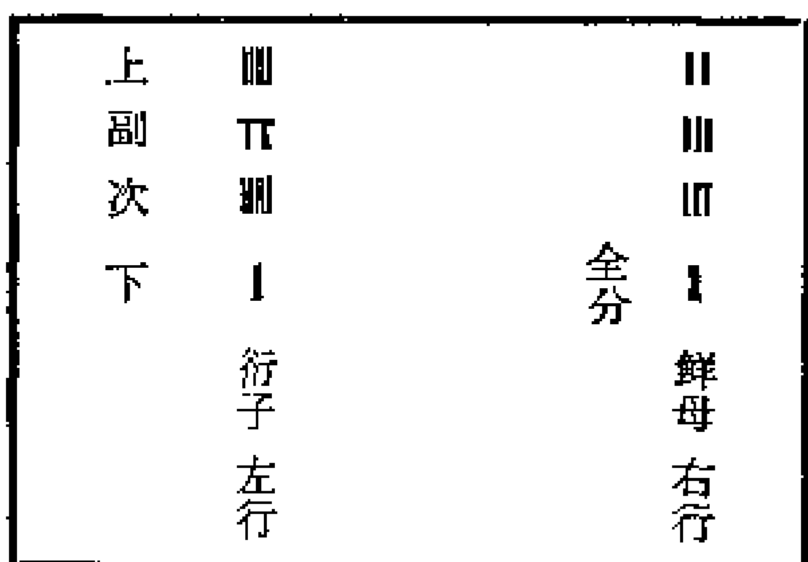


乃以右行母,互乘左行子,左上,得108(原为"12"),副位,得54(原为"9"),次得54(原为"6"),下得108(原为"18"),乃变左(原"左"

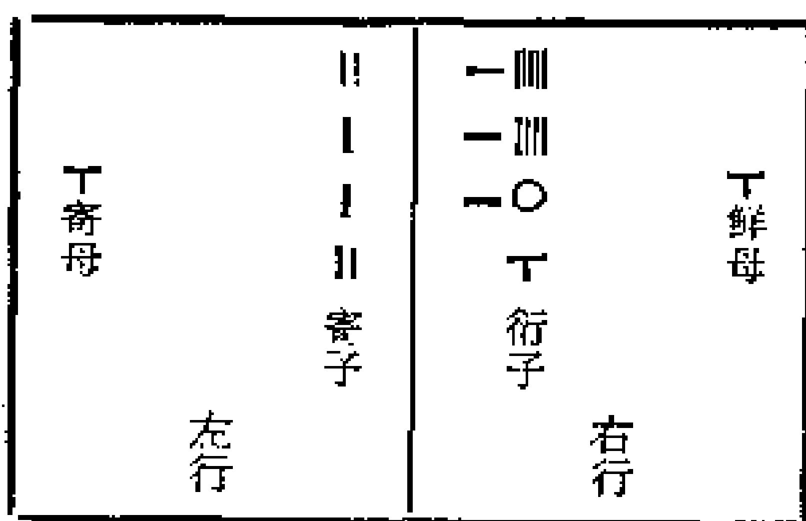
误为"右")行名为寄子．以诸母相乘，得 324(原为"18")，为寄母．母子俱约为定(原无"母子俱约为定．")．具图如后：



次列棚道全分，及所当鲜母衍子，3 当 5，及 3 当 7，并 2 当 5．



乃以右行鲜母，互乘左行衍子，上得 45，副得 42，次得 30，下得 18，为右行．以鲜母相乘．得 18，亦俱约之为定(原无"亦俱约之为定．")，乃对寄左图列之．



乃以左右两行母子对乘之，上得 30（原为"540"），副得 14（原为

"378"),次得10(原为"180"),下得12(原为"324"),母得36(原为"324").

上	30	
副	13	36 总母
次	10	
下	12	

并四子,得66,为总子.以36,为总母(此处原为"今以平方术入之,并四子,得1422,为总子.以列位四,乘乘母324,得1296,为总母.").

66 总子
36 总母
11 定子
6 定母

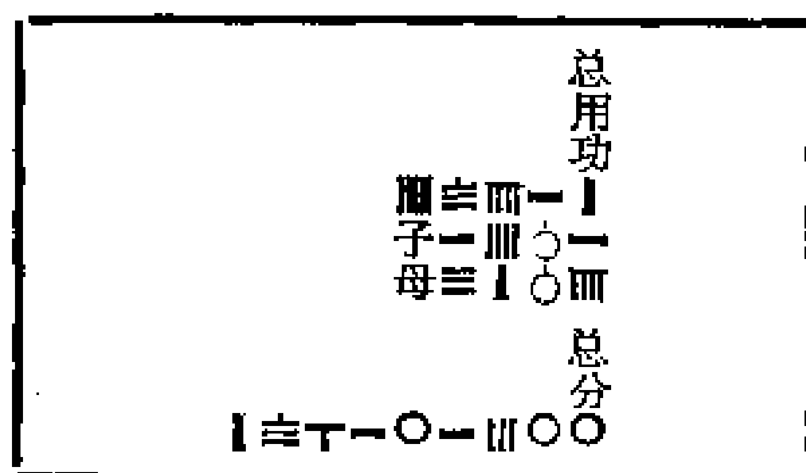
乃以总母子求等,得6(原为"18"),俱约之,总子得11(原为"79"),为定子.总母得6(原为"72"),为定母.以定子11(原为"79"),乘棚道40步,得440(原为"3160")于次.以棚道40步,减往来160步,余120,为平道.以乘定母6(原为"72"),得720(原为"8640"),加次,共得1160(原为"11800").又以踟蹰10加1,于身下加1,得1276(原为"12980"),仍于次.又以载输20步,乘定母6(原为"72"),得120(原为"1440"),并次,得1396(原为"14420"),为统数.以定母6(原为"72")除统数,得232步,不尽约为3分步之2(原为"得200步,不尽约为18分步之5"),为定一返步.乃复通分内子,得698(原为"3605"),为到法.乃置程里60,以360通

之，得 21600 步，乘担土 1 尺 3 寸，得 28080 尺，以到母 3(原为“18”)乘之，得 84240 尺(原为“505440 尺.)，为到实．实如法，除得 120 尺(原为“140 尺”)，不尽 480(原为“740”)，与法求等，得 2(原为“5”)，约之，为 349 分尺之 240(原为“721 分尺之 148”)，为到土．复通分内子，得 42120(原为“101088”)，又以壤母 3，因得 126360 尺(原为“303264 尺”)，为壤法．次以到土母 349(原为“721”)，乘壤积 770 万尺，得 268730 万尺(原为“555170 万尺”)，为壤实．实如法而一，得 21267 功(原为“18306 功”)，不尽 1880(原为“149216”)，与法求等，得 40(原为“得 32”)，俱约之，为 21267 功 3159 分功之 47(原为“18306 功 9477 分功之 4663”)，为担土功．次列前土功图，筑功 17111 功 9 分功之 1，及穿功 20533 功 3 分功之 1(原为“10266 功 3 分功之 2”，)，具图如后：

通分图　担功 21267 子 47 母 3159	穿功 20533 子 1 母 3	筑功 17111 子 1 母 9
67182500 担率 母 3159	61600 穿率 母 3	154000 筑率 母 9
担率 67182500　就母图　就上母 0	穿率 61600　1003	筑率 154000　301

列三行动，各通分内子，筑率得 154000，穿率得 61600(原为“30800”)，担率得 67182500(原为“173490625”)．按术当以通率图诸母互乘诸率，今验担母 3159(原为“9477”)，可用筑母 9 约，亦可用穿母 3 约，故从省．以筑母 9，约担母 3159(原为“9477”)，得

351(原为“1053”)，为筑率乘数．又以穿母 3，约担母 3159(原为“9477”)，得 1053(原为“3159”)，为穿率乘数． 各以乘数，乘本率，名曰就母图． 乃以 3159(原为 “9477”)，变名曰就母． 先以筑率 154000，乘乘数 351 (原为 “1053”)，得 54054000 (原为“162162000”)，为筑分．次以穿率 61600(原为“30800”)，乘乘率 1053(原为“3159”)，得 64864800(原为“97297200”)，为穿分．就以担率 67182500(原为“173490625”)，为担分． 并三分，共得 186101300(原为“432949825”)，为总功分实． 以就母 3159(原为“9477”)除之，得 58911 功 3159 分功之 1451(原为“45685 功 9477 分功之 2557”)，为总用功．其图如后：



置各县日程，约税力，得力率，副并为科法．上置甲县力 133866，以 1 日程约之，只得此数，为甲率． 又置乙县力 237984，以 2 日约，得 118992，为乙率．又置丙县力 312354，以 3 日约，得 104118，为丙率．

列三率，求等，得14874，俱约之，甲得9，乙得8，丙得7，各为定率。副并得24，具图如后：

甲定率 乙定率 丙定率 并率

总分

乃以总分186101300（原为"432949825."），遍乘三县定率，为各实．以就母3159（原为"9477"），乘并率24为科法．甲得1674911700（原为"3896548425."），乙得1488810400（原为"3463598600."），丙得1302709100（原为"3020648775."），各为实．法得75816（原为"227448".），为科法．除各实，具图此后：

甲实

乙实

丙实

科法

乃以科法除各实，甲得22091功（原为"17131功."），不尽60444（原为"不尽136737."），为甲县功．乙得19637（原为"15228."），不尽11608（原为"20456."），为乙县功．丙得17182（原为

"13324".)，不尽38588(原为"不尽131623".)，为丙县功．甲丙二县(原为"诸县")不尽，皆辈为1功．甲合科22092功(原为"17132功.")，乙合科19637功(原为"15229功.")，丙合科17183功(原为"13325功.")．

求砖者，倍包砌砖厚(原无"包砌砖厚"四字，原为"转道并阔"四字.)6尺，得1丈2尺，遍加台上下广袤，变名为上下阔长．从台面铺砌(原无"台面铺砌"四字.)砖厚6寸加台高，为台直．

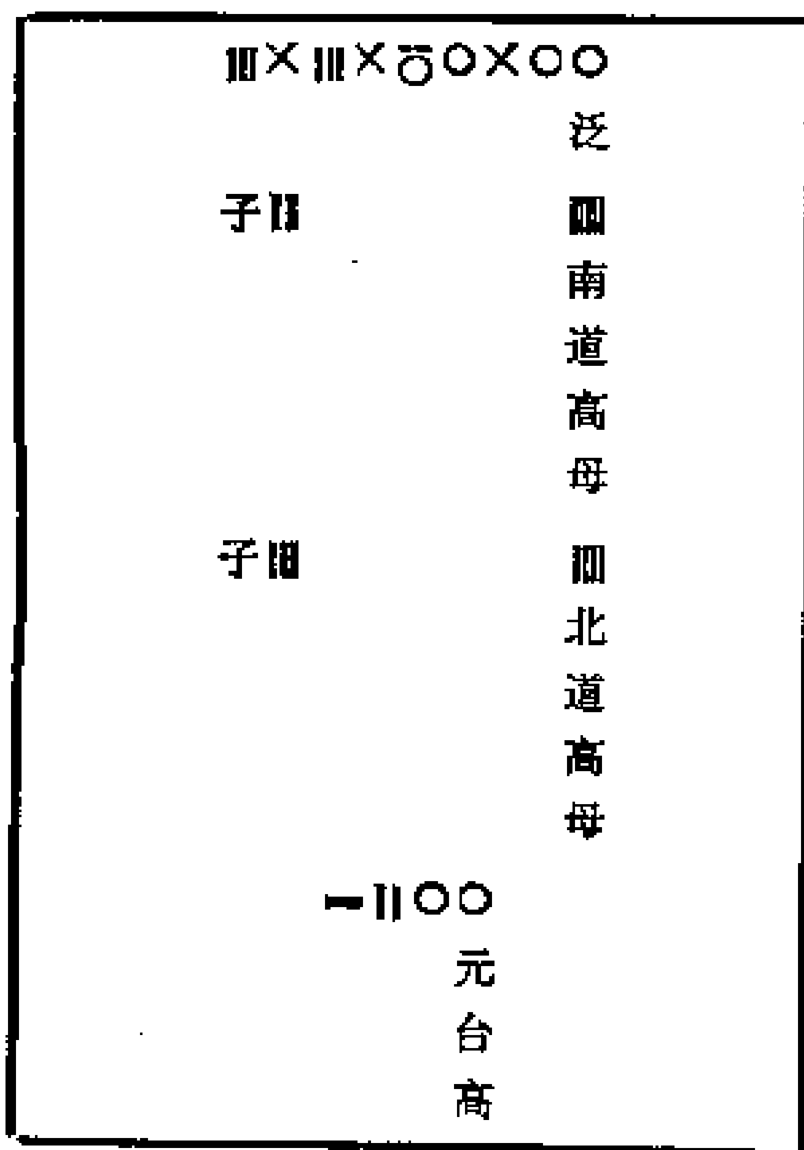
上袤𝍦丈	台高𝍩𝍡丈	上广𝍣丈
下袤𝍩𝍦丈		下广𝍩𝍣丈
上长𝍧𝍪〇寸	台直𝍩𝍡〇𝍥寸	上阔𝍥𝍪〇寸
下长𝍩𝍧𝍪〇寸		下阔𝍩𝍥𝍪〇寸

先列砖长1尺2寸，阔6寸，厚2寸5分，相乘之，得180寸，为砖积法．次列石版长5尺，阔2尺，厚5寸，相乘得5000寸，为石积法．具图如后：

石长𝍭〇	砖长𝍩𝍡
石阔𝍪〇	砖阔𝍥
石厚𝍤	砖厚𝍡𝍭寸
𝍭〇〇〇石	𝍠𝍰〇砖

验得诸法皆变寸，乃以各图上下长阔直，按术求率，倍上长820寸，得1640寸，加上长1820寸，得3460，乘上阔620，得2145200，为寄．次倍下长1820，得3640，加上长820，得4460，乘下阔1620，得7225200，并寄，得9370400，乘台直1206寸，得11300702400寸，仍为寄．乃验土积图土率9240丈，以100万寸通之，得924000万寸．以减寄，余2060702400寸，如6而一，得343450400寸，为泛．

次置南道高，5分之2，北高道，强半，系4分之3，及台元高1200寸．具图如后：



乃以南道高子2，乘元台高，得2400寸，为南实．以北道高子3，乘元台高，得3600寸，为北实．各如本母而一，得480寸，约为4丈8尺，为南道两隅，又为东外道巽隅高，又为西道坤隅高．所得900寸，约为9丈，为北道两隅高．又为西道乾隅高，又为东里道艮隅高．具图如后：

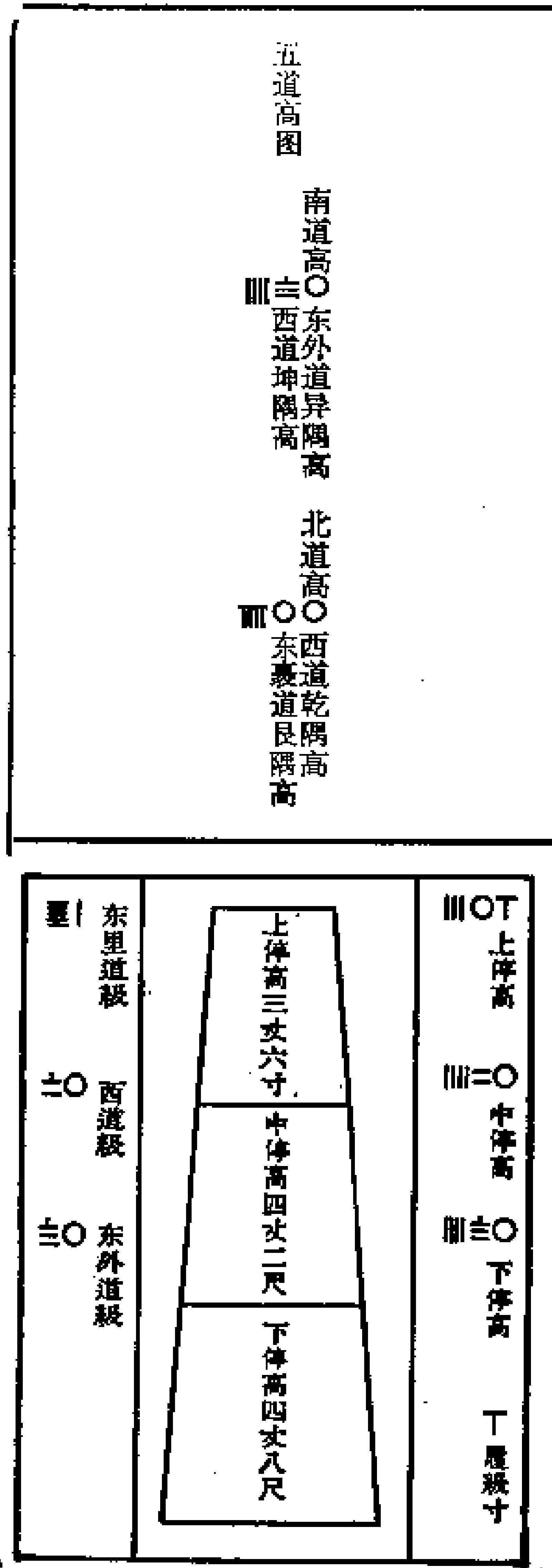

五道高图
南道高〇
东外道巽隅高
西道坤隅高
北道高〇
西道乾隅高
东裹道艮隅高
东里道級
西道級
东外道級
上停高三丈六寸
中停高四丈二尺
下停高四丈八尺
上停高
中停高
下停高
一層級寸

图 40

以北道高9丈，减台高12丈，余3丈，并铺砌砖厚6寸，得3丈6寸（原无"并铺砌砖厚6寸，得3丈6寸."二语.），为上停高，以南道高4丈8尺，减北道高9丈，余4丈2尺，为中停高. 命南道高4丈8尺，为下停高. 三停高，皆如履级寸而一，得51（原为"50".），为东里道级数. 得70，为西道级数. 得80，为东外道级数. 次以上阔620寸（原为"上长820寸."），减下阔1620寸（原为"下长1820寸."），余1000寸，以半之，得500寸，为句. 以乘南道高480寸，得24万寸，为实. 如台高1200寸而一，得200寸（原为"100寸."），为底率. 以率减下阔1620（原为"下长1820".），余1420寸（原为"余1720寸."），为底股. 以外道级80约之，得1尺7寸4分寸之3（原为"2尺1寸5分."），为外道踏纵（此处原文尚有"又以底率100寸，减底股1720寸，余1620寸，为中股."诸语.），乃以句500寸，乘中停高4丈2尺，得21万寸，在实. 如台高1200寸而一，得175寸，为中率（此处原有"以中率减中股1620寸，余1445寸，为上股. 以西道级70，除上股1445寸，得2尺14分寸之9，为西道踏纵."诸语）. 又以句500寸，乘上停高306寸

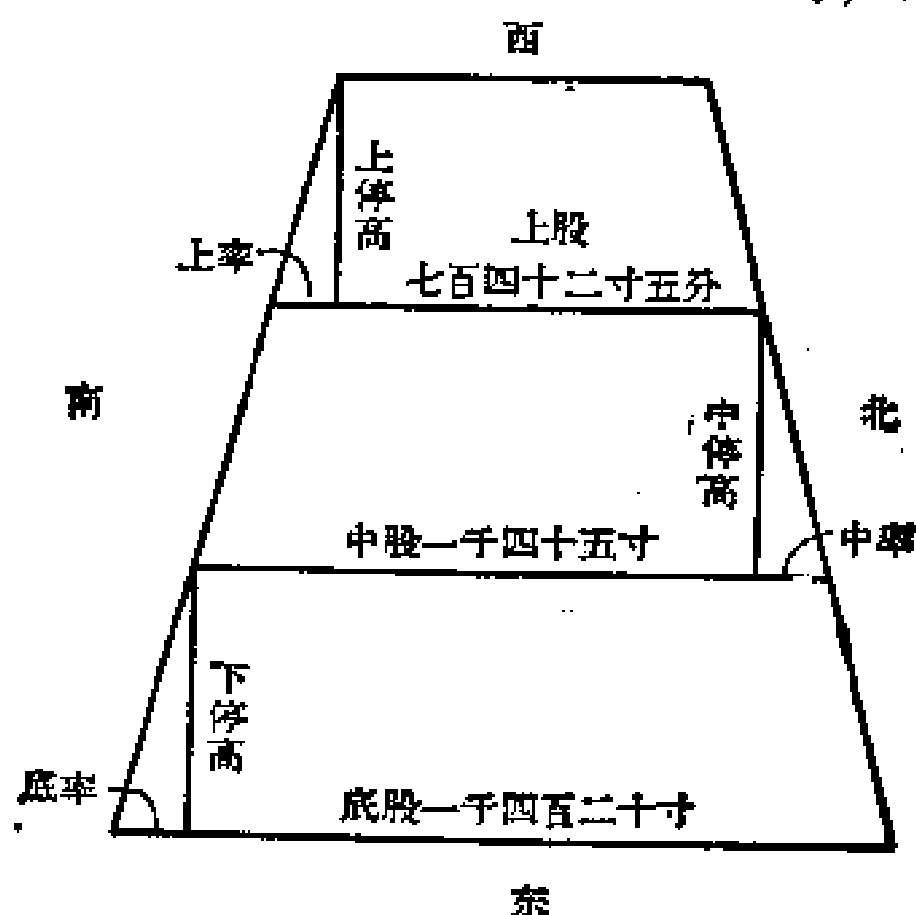
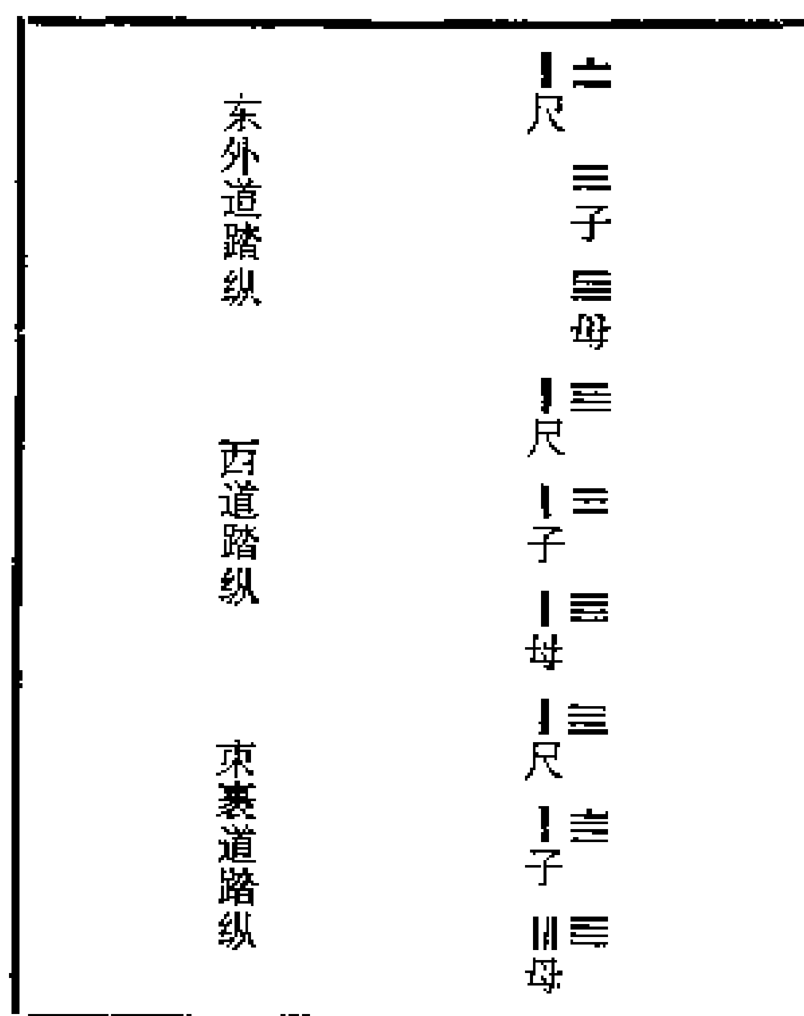


图41　股率

(原为“300 寸”.),得 153000 寸(原为“15 万寸”.),为实。如台高 1200 寸而一,得 127 寸 5 分(原为“125 寸.”),为上率. 次以中率并底率,得 375 寸,减底股 1420 寸,余 1045 寸,为中股. 以西道级 70 除之,得 1 尺 4 寸 14 分寸之 13,为西道踏纵. 又以上率并中率,得 302 寸 5 分,减中股 1045 寸,余 742 寸 5 分,为上股(原无“次以中率并底率,得 375 寸. …余 742 寸 5 分,为上股.”诸语.此处原为“并中率 175 寸,得 300,减上股 1445 寸,余 1145 寸,为实.”诸语). 如里道级 51(原为“50”)而一,得 1 尺 4 寸 34 分寸之 19(原为“得 2 尺 2 寸 9 分.”),为里道踏纵. 各得具图以见,如后:



次以下阔 1620 寸,乘台直 1206 寸,得 1953720 寸于上. 以上停高 306 寸,乘中停高 420 寸,得 128520 寸于次. 以中停高 420 寸,乘下停高 480 寸,得 201600 寸,并次,仍于次. 以下停高 480 寸,乘上停高 306 寸,得 146880 寸,又并次,共得 477000 寸. 以上阔减下阔 1000 寸乘之,得 47700 万,为实. 如台高 1200 寸而一,得 397500 寸,减上,余 1556220 寸,为补. 3 因道阔,并下长,得 2000

寸，又加下阔 1620 寸，得 3620 寸于上. 倍底率，得 400 寸，减上，余 3220 寸，以乘南道高 480 寸，得 1545600 寸，倍之，得 3091200 寸，为需. 倍道阔并下长，得 1940 寸，加下阔 1620，得 3560 寸于次. 上阔减下阔，得 1000 寸，乘北道高 900 寸，得 90 万寸，为实. 如台高 1200 而一，得 750 寸，减次，余 2810 寸，乘北道高 900 寸，得 2529000 寸，倍之，得 5058000 寸，为寄. 北道高减台直，得 306 寸，以倍道阔 120 寸乘之，得 36720 寸，并补加需又并寄，共得 9742140 寸. 复以半道阔 30 寸乘之，得 292264200 寸，为叠砌积. 并泛，得 635714600 寸，为砖石共率(本段原为"次以道阔 6 尺，并下长 1820 寸，得 1880 寸，为补. 以南北道高并台高，共得 2580 寸，乘补，得 4850400 寸，为需. 次以上广 500 寸，减下广 1500 寸，余 1000 寸，为址. 乘南道高 480 寸，得 48 万寸，为实. 从台高 1200 寸除之，得 400 寸，为减率. 以减下广 1500 寸，余 1100 寸，为南道长. 并下广 1500 寸，得 2600，乘南道高 480 寸，得 1248000 寸，加需，又以址 1000 寸，乘北道高 900 寸，得 90 万寸，为实. 亦如台高 1200 而一，得 750，以减下广 1500 寸，余 750 寸，为北道长. 并下广 1500，得 2250 寸，乘北道高 900 寸，得 2025000 寸，又加需，共得 8123400，以半道阔 3 尺乘之，得 243702000 寸，并泛 343450400，得 587152400 寸，为共率.")． 次以基脚 7 层，乘石版厚 5 寸，得 35 寸，为基高. 次以 3 因道阔并下长，得 2000 寸，以下阔并倍道阔 1740 乘之，得 348 万寸，为基率. 次以下长并道阔，得 1880 寸，乘下阔 1620 寸，得 3045600 寸，减基率，余 434400 寸，乘基高 35 寸，得 15204000 寸，为石率(原无"次以 3 因道阔并下长，…. 得 15204000 寸，为石率."诸语. 此段原为"次倍道阔，得 120，并下阔 1620 寸，得 1740，乘下长 1820，得 3166800，为基率. 次以下广 1500 寸，乘下袤 1700 寸，得 255 万，减基率，余 616800 寸，乘基高 35 寸，得 21588000 寸，为石率."诸语.)． 以石率减共率，余 620510600 寸(原为"余 565564400 寸.")，为砖率. 以砖积法 180

寸除之，得 3447281 片 9 分片之 1(原为"得 3142024 片 9 分片之 4".)，乃以石积法 5000 寸，除石率 15204000 寸(原为"21588000 寸.")，得 3040 片(原为"4317 片.")，为石版．不尽 4000 寸(原为"不尽 3000 寸.")，弃之不单、合问．

【新释】 已知：$a_1=7$ 丈，$a_2=17$ 丈，$b_1=5$ 丈，$b_2=15$ 丈，$H=12$ 丈．由(α)式，得土坚积：

$$v=\frac{1}{6}[(2\times7+17)\times5+(7+2\times17)\times15]\times12$$

$$=\frac{1}{6}[155+615]\times12=1540\text{ 丈}=1540000\text{ 尺}$$

$$=1540000000\text{ 寸}.$$

次知：$p_1=90$ 尺，$p_2=200$ 尺，$q_1=3$，$q_2=4$，由(β_1)，(β_2)二式，得

$$N_1=\frac{1540000}{90}=17111\frac{1}{9}\text{ 功},$$

$$N_2=\frac{4\times1540000}{3\times200/2}=\frac{6160000}{300}=20533\frac{1}{3}\text{ 功}.$$

次知：$l=60$ 里$=21600$ 步，$k=160$ 步，$k_1=40$ 步，$k_2=160-40=120$ 步．$\frac{r_1'}{r_1}=\frac{1}{3}$，$\frac{s_1'}{s_1}=\frac{5}{3}$，$\frac{r_2'}{r_2}=\frac{1}{2}$，$\frac{s_2'}{s_2}=\frac{7}{3}$，$\frac{r_3'}{r_3}=\frac{2}{3}$，$\frac{s_3'}{s_3}=\frac{5}{2}$，$\frac{t'}{t}=\frac{1}{10}$，$k'=20$ 步，$p_3=1.3$ 尺，$q_3=5$．由(β_1')式，得定一返步：

$$K=\left\{40\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{7}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{5}{2}\right]+120\right\}\left(1+\frac{1}{10}\right)+20$$

$$=\left\{40\left[\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\frac{7}{18}+\frac{5}{6}\right]+120\right\}\times\frac{11}{10}+20$$

$$=\left\{40\times\frac{11}{6}+120\right\}\times\frac{11}{10}+20$$

$$=\frac{1}{6}\{440+720\}\times\frac{11}{10}+20=232\frac{2}{3}\text{ 步.}$$

由(β_2')式，得每功到土

$$v'=\frac{60\times360\times1.3}{232\frac{2}{3}}=\frac{84240}{698}=120\frac{240}{349}\text{ 尺.}$$

由(β_3)式，得共用担土功

$$N_3=\frac{5\times1540000}{3\times\left(120\frac{240}{349}\right)}=\frac{2687300000}{126360}=21267\frac{47}{3159}\text{ 功.}$$

由(β)式，得总用功

$$N=17111\frac{1}{9}+20533\frac{1}{3}+21267\frac{47}{3159}$$

$$=58911\frac{1451}{3159}\text{ 功.}$$

余分收为 1 功，因得

$$N=58912\text{ 功.}$$

又知：$c_1=133866$, $d_1=1$ 日，$c_2=237984$, $d_2=1$ 日，$c_3=312354$, $d_3=3$ 日，由(γ_i)各式，得

$$\text{甲县差夫}=\frac{133866\times\left(58911\frac{1451}{3159}\right)}{133866+\frac{237984}{2}+\frac{312354}{3}}$$

$$=\frac{133866\times\left(58911\frac{1451}{3159}\right)}{133866+118992+104118}$$

$$=\frac{9\times\left(58911\frac{1451}{3159}\right)}{9+8+7}=\frac{1674911700}{24\times3159}$$

$$=\frac{1674911700}{75816}=22091\frac{60444}{75816}$$

$$\doteq22092\text{ 功}$$

$$乙县差夫=\frac{8\times\left(58911\frac{1451}{3159}\right)}{24}=\frac{1488810400}{75816}$$

$$=19637\frac{11608}{75816}\doteq19637\text{ 功},$$

$$丙县差夫=\frac{7\times\left(58911\frac{1451}{3159}\right)}{24}=\frac{1302709100}{75816}$$

$$=17182\frac{38588}{75816}\doteq17183\text{ 功}.$$

复知：$g=6$ 尺，$f'=6$ 尺，$f=6$ 寸，$f_1=12$ 寸，$f_2=6$ 寸，$f_3=2.5$ 寸，$f_1'=50$ 寸，$f_2'=20$ 寸，$f_3'=5$ 寸，由(δ)式，得砖泛积：

$$v_1=\frac{1}{6}\{[2(700+120)+(1700+120)]\times(500+120)$$
$$+[(700+120)+2(1700+120)]\times(1500+120)\}$$
$$\times(1200+6)-1540000000$$
$$=\frac{1}{6}\{3460\times620+5460\times1620\}\times1206-1540000000$$
$$=\frac{1}{6}\times9370400\times1206-1540000000$$
$$=1883450400-1540000000=343450400\text{ 寸}.$$

由(ε_1)，(ε_2)二式，得

$$砖积法=12\times6\times2.5=180\text{ 千},$$
$$石积法=50\times20\times5=5000\text{ 寸}.$$

次知：$\frac{m_1'}{m_1}=\frac{2}{5}$，$\frac{m_2'}{m_2}=\frac{3}{4}$，由($\zeta_i$)各式，得

南道高：$Q_1=\frac{2}{5}\times1200=480$ 寸，

北道高：$Q_2=\frac{3}{4}\times1200=900$ 寸，

上停高：$H_1=120+900+6=306$ 寸，

中停高：$H_2=900-480=420$ 寸，

下停高：$H_3=480$ 寸.

又知：$\alpha=6$ 寸，由(η_i)和(θ_i)各式，得各道级数及踏纵：

$$R_1=\frac{306}{6}=51\text{ 级},$$

$$R_2=\frac{420}{6}=70\text{ 级},$$

$$R_3=\frac{480}{6}=80\text{ 级}.$$

$$T_1=\frac{1620-\dfrac{1000\times480}{2\times1200}}{80}=\frac{1420}{80}=17\frac{3}{4}\text{ 寸},$$

$$T_2=\frac{1620-\dfrac{1000\times1380}{2\times1200}}{70}=\frac{1045}{70}=14\frac{13}{14}\text{ 寸},$$

$$T_3=\frac{1620-\dfrac{1000\times2106}{2\times1200}}{51}=\frac{742.5}{51}=14\frac{19}{34}\text{ 寸}.$$

由(τ)式，得叠砌积：

$$\begin{aligned}v_2=\frac{60}{2}\Bigg\{&\Bigg[1620\times1206-\frac{1000}{1200}(306\times420+420\\&\times480+480\times306)\Bigg]\\&+2\left[1820+1620+3\times60-\frac{1000\times480}{1200}\right]\times480\\&+2\left[1820+1620+2\times60-\frac{1000\times900}{1200}\right]\\&\times900+2\times60\times306\Bigg\}\\=30\{&[1953720-397500]+2[3620-400]\\&\times480+2[3560-750]\times900+36720\}\end{aligned}$$

$$=30\{1556220+3091200+5058000+36720\}$$
$$=30\times 9742140=292264200 \text{ 寸}.$$

由($\varkappa$)式，得砖石共率：

$$v_3=343450400+292264200=635714600 \text{ 寸}.$$

又知：$n=7$，由(λ)式，得石率：

$$v_4=7\times 5[(1820+180)(1620+120)-(1820+120)\times 1620]$$
$$=35[3480000-3045600]=35\times 434400$$
$$=15204000 \text{ 寸}.$$

由(μ_1)，(μ_2)二式，得共需

$$\text{砖}=\frac{635714600-15204000}{180}=\frac{620510600}{180}$$
$$=3447281\frac{1}{9}\doteq 3447281 \text{ 片},$$
$$\text{石}=\frac{15204000}{5000}=3040\frac{4}{5} \text{ 片}.$$

余分弃之不辈，因得共需

$$\text{石}=3040 \text{ 片}.$$

60. 堂 皇 程 筑

问有营造地基，长二十一丈，阔一十七丈．先令七人筑坚三丈，计功二日．今涓吉立木有日，欲限三日筑了，每日合收杵手几何？

答曰：日收五百五十五工三分工之一．

术曰：以长乘阔，又乘元日元人，为实．以限日乘筑丈数，为法．除之，得人夫．

【新释】 设地基长为 a，阔为 b，先令人数为 k，筑坚数为 v，计功日数为 d_1，限日为 d，则

$$\text{每人日筑}=\frac{v}{kd_1}$$

而每日合收

$$杵手=\frac{kd_1ab}{dv} \qquad (\alpha)$$

【原草】 草曰：以长21丈，乘阔17丈，得357丈，又乘元2日，得714，又乘元7人，得4998，为工实．以限3日乘元筑3丈，得9，为法．除实，得555功，不尽3，与法俱3约之，为3分工之1，为日收555工3分工之1．合问．

【新释】：已知：$a=21$ 丈，$b=17$ 丈，$k=7$ 人，$v=3$ 丈，$d_1=2$ 日，$d=3$ 日．代入(α)式，得每日合收

$$杵手=\frac{7\times2\times21\times17}{3\times3}=\frac{4998}{9}=555\frac{1}{3}\ 人.$$

61. 砖 砌 计 积

问有交到六门砖一十五垛，每垛高五尺，阔八尺，长一丈．其砖每片长八寸，阔四寸，厚一寸．欲砌地面，使用堂屋三间，各深三丈，共阔五丈二尺．书院六间，各深一丈五尺，各阔一丈二尺．后合四间，各深一丈三尺，内二间，阔一丈，次二间，阔一丈五尺．亭子地面一十所．各方一丈四尺．欲知见有今用外余砖各几何？

答曰：见有，一十八万七千五百片，

今用，一万六千四百六片四分片之一，

外余，一十七万一千九十三片四分片之三．

术曰：以少广求之．置各地面深阔相乘，以间数（此处原尚有一"若"字）所数乘之，共为实．砖长阔数相乘，为砖平法，除得今用砖数．次以砖垛高长阔相乘，为实．却以砖法乘厚，得数，为砖积法．除之，得每垛砖数．次以垛数乘之，得见有砖．以减今用砖，得余砖．

【新释】 设六门砖垛数为 k，每垛高为 h_1，长为 a_1，阔为 b_1，砖长为 a_2，阔为 b_2，厚为 h_2，则得

$$\text{见有砖}=\frac{ka_1b_1h_1}{a_2b_2h_2}\tag{α}$$

次设堂屋间数为 n_1，深为 A_1，共阔为 B_1；书院间数为 n_2，深为 A_2，阔为 B_2；后合间数为 n_3，深为 A_3，内 n_3' 间阔为 B_3'，n_3-n_3' 间阔为 B_3；亭子所数为 n_4，地面各方为 A_4．则得共面积

$$A=A_1B_1+n_2A_2B_2+[n_3'B_3'+(n_3-n_3')B_3]A_3+n_4A_4^2\tag{β}$$

以砖平法 a_2b_2 除共积，得

$$\text{今用砖}=\frac{A}{a_2b_2}\tag{γ}$$

$$\text{外余砖}=\frac{ka_1b_1h_1}{a_2b_2h_2}-\frac{A}{a_2b_2}\tag{δ}$$

【原草】　草曰：置堂阔 5 丈 2 尺，乘深 3 丈，得 156000 寸于上．又置书院深 1 丈 5 尺，乘阔 1 丈 2 尺，得 18000 寸，又以 6 间乘之，得 108000 寸，加上，共得 264000 寸，仍于上(原为"并上．")．又置后合阔 1 丈，并阔 1 丈 4 尺，得 2 丈 5 尺，又以各 2 间乘之，得 500 寸，以乘各深 1 丈 3 尺，得 65000 寸，加上，得 329000 寸，仍于上(原为"并上．")．次置亭基 1 丈 4 尺，自乘，得 19600 寸，以 10 所乘之，得 196000 寸，又并上，共得 525000 寸，为实．以砖长 8 寸，乘阔 4 寸，得 32 寸，为砖平法．除之，得 16406 片 4 分片之 1，为共用砖．次置每垛高 5 尺，乘阔 8 尺，得 4000 寸，又乘长 1 丈，得 40 万寸，为每垛实．却以砖平法 32 寸，乘厚 1 寸，只得 32 寸，为砖积法．除之，得 12500 片，又以 15 垛乘之，得 187500 片，为见有砖．内减今用砖，余有 171093 片 4 分片之 3，为外余砖数．各问．

【新释】　已知：$k=15$，$a_1=100$ 寸，$b_1=80$ 寸，$h_1=50$ 寸；$a_2=8$ 寸，$b_2=4$ 寸，$h_2=1$ 寸．代入(α)式，得

$$\begin{aligned}\text{现有砖}&=\frac{15\times100\times80\times50}{8\times4\times1}=\frac{15\times400000}{32}\\&=15\times12500=187500\text{ 片}.\end{aligned}$$

次知：$A_1=300$ 寸，$B_1=520$ 寸，$n_2=6$，$A_2=150$ 寸，$B_2=120$ 寸；$n_3=4$，$A_3=130$ 寸，$n_3'=2$，$B_3'=100$ 寸，$B_3=150$ 寸；$n_4=10$，$A_4=140$ 寸．代入(β)式，得共面积：

$$A=300\times520+6\times150\times120+[2\times100+(4-2)\times150]\times130+10\times140^2$$
$$=156000+108000+65000+196000=525000 \text{ 寸}.$$

由(γ)式，得

$$\text{今用砖}=\frac{525000}{8\times4}=16406\frac{1}{4} \text{ 片}.$$

由(δ)式，得

$$\text{外余砖}=187500-16406\frac{1}{4}=171093\frac{3}{4} \text{ 片}.$$

62．竹围芦束

问受给场交收竹二千三百七十四把，内笙竹一千一百五十一把，每把外围三十六竿．水竹一千二百二十三把，每把(原脱"把"字)外围四十二竿．芦三千六十五束，每束围五尺．其芦元样五尺五寸，今纳到围小，合准无芦几束，及外笙竹各几何？

答曰：笙竹，一十四万六千一百七十七竿．

水竹，二十万六千六百八十七竿．

合准元苇，二千五百三十二束．一百二十一分束之七．

术曰：以方田及圆率求之．置圆束差，并竹外围竿数，以乘外围，又乘把数，为竹实．倍圆束差，为竹法．除之，各得二竹数．皆以把数为心加入，各得竹条数．位芦围尺数自乘，以乘芦束数，为芦实．以芦元尺数自乘，为芦法．除实，得所准芦束数．

【新释】　设圆束差为 d，笙竹把数为 n_1，每把外围竿数为 k_1，水竹把数为 n_2，每把外围竿数为 k_2，则得

$$\text{笙竹}=\frac{n_1(k_1+d)k_1}{2d}+n_1 \qquad (\alpha_1)$$

$$外竹=\frac{n_2(k_2+d)k_2}{2d}+n_2 \qquad (\alpha_2)$$

次设芦为 n_3 束,每束圆数为 k_3 尺,原样尺数为 k. 则合准

$$元芦=\frac{n_3k_3^2}{k^2} \qquad (\beta)$$

【原草】 草曰:置圆束差 6,并筀竹外围 36 竿,得 42 竿,以乘外圆 36 竿,得 1512 竿,又乘筀竹 1151 把,得 1740312 竿,为筀竹实. 倍圆束差 6,得 12,为竹法. 除实,得 145026 竿,以把数 1151 并之,得 146177 竿,为筀竹. 又置圆差 6,并水竹外围 42 竿,得 48 竿,以乘水竹围 42 竿,得 2016 竿,又乘水竹 1223 把,得 2465568 竿,为水竹实. 亦以竹法 12 除之,得 205464 竿,以水竹把数 1223 并之,得 206687 竿,为水竹数.

次置芦围 5 尺,通为 50 寸,以自乘,得 2500 寸,又乘芦束数 3065,得 7662500 寸,为芦实. 以元样芦圆 5 尺 5 寸,亦通为 55 寸,以自乘,得 3025 寸,为芦法. 除实,得 2533 束,不尽 175 寸,与法求等,得 25,俱以约之,得 121 分束之 7,为芦 2533 束 121 分束之 7. 合问.

【新释】 已知:$d=6$,$n_1=1151$ 把,$k_1=36$ 竿,$n_2=1223$ 把,$k_2=42$ 竿,代入(α_i)各式,得

$$筀竹=\frac{1151\times(36+6)\times36}{2\times6}+1151=\frac{1151\times1512}{12}+1151$$

$$=145026+1151=146177\ 竿,$$

$$水竹=\frac{1223\times(42+6)\times42}{12}+1223=\frac{1223\times2016}{12}+1223$$

$$=205464+1223=206687\ 竿.$$

又知:$n_3=3065$ 束,$k_3=50$ 寸,$k=50$ 寸,由(β)式,得合准

$$元芦=\frac{3065\times50^2}{55^2}=\frac{7662500}{3025}=2533\frac{7}{121}\ 束.$$

63.积木计余

问元管杉木一尖垛，偶不记数．从上取用至中间，见存九条为面阔，元木及见存各几何？

答曰：元木，一百五十三条．

见存木，一百一十七条．

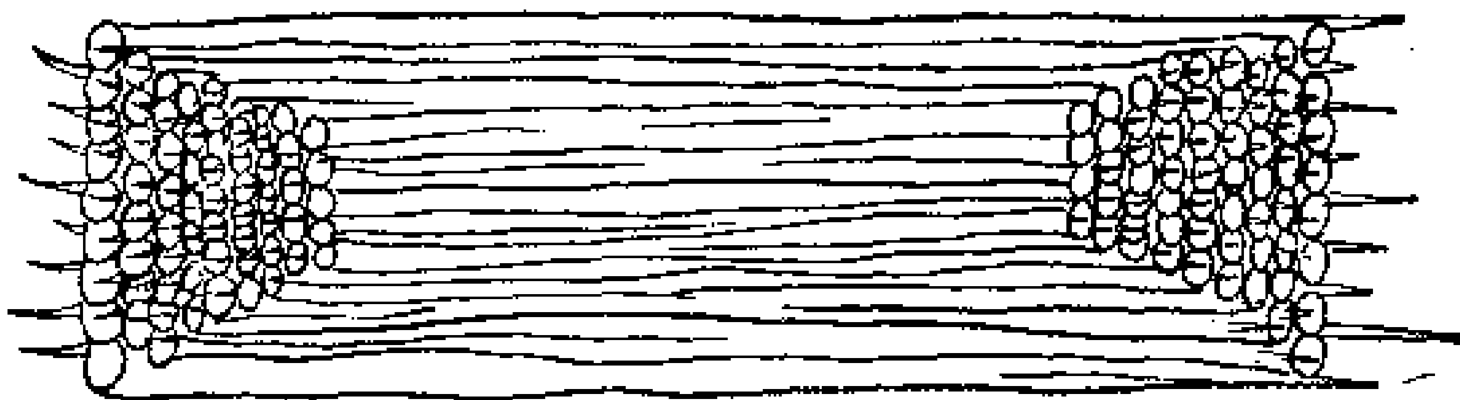


图42　垛木

术曰：以商功求之，堆积入之．倍中面，副置，减一，以乘其副，得数，半之，为元木．副置上层，减一，以乘其副，得数，半之，用减元木，余为见存．其非中一层数者，各以自地上至面层数，互术求之．

【新释】　设杉木尖垛的中面条数为 k，由自然数求和的公式，可得

$$元木=\frac{2k(2k-1)}{2} \qquad (\alpha)$$

$$见存木=\frac{2k(2k-1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2} \qquad (\beta)$$

【原草】　草曰：倍中面9条，得18，副置，减1，余17，以乘副18，得306条，以半之，得153条，为元木之数．副置中面9条，减

1，余8，以下乘9，得72，以半之，得36，以减元木153，余117条，为见存木数．合问．

【新释】　已知：$k=9$，代入(α)，(β)二式，得

$$\text{元木}=\frac{18\times 17}{2}=153\text{ 条},$$

$$\text{见存木}=153-\frac{9\times 8}{2}=153-36=117\text{ 条}.$$

第八章　军　旅　类

在"计造军衣"一问中，秦氏把盈朒问题的各种情形，叙述得相当详尽，是富有参考价值的一个题目.

本章前几问，关于方阵、锐阵、圆阵各种队形间的相互变换，也是饶有趣味的.

第十五卷　凡　三　问

64. 计 立 方 营

问一军三将，将三十三队，队一百二十五人. 遇暮立营，人占地方八尺. 须令队间容队，帅居中央，欲知营方几何?

答曰：营方，一百七十一丈. 队方，九丈.

术曰：以少广求之. 置人占方幂，乘每队人，为队实. 以一为隅，开平方，所得，为队方面. 或开不尽，就为全数. 次置队数，乘将，又四因之，增三，共为实. 以二为从方，一为从隅，开平方，得率，以乘队方面，为营方面. 开不尽，为全数.

【新释】　设人占地方面为 a，每队 k 人，队方为 x_1，则

$$x_1^2=ka^2 \tag{α}$$

次设一军 m 将，每将 n 队，帅居中央，所占面积与队相同. 营方面所容队数为 x，且须令队间容队，因得

$$(x+1)^2=4(mn+1)$$

或

$$x^2+2x-(4mn+3)=0 \tag{β}$$

x 既经求出，则

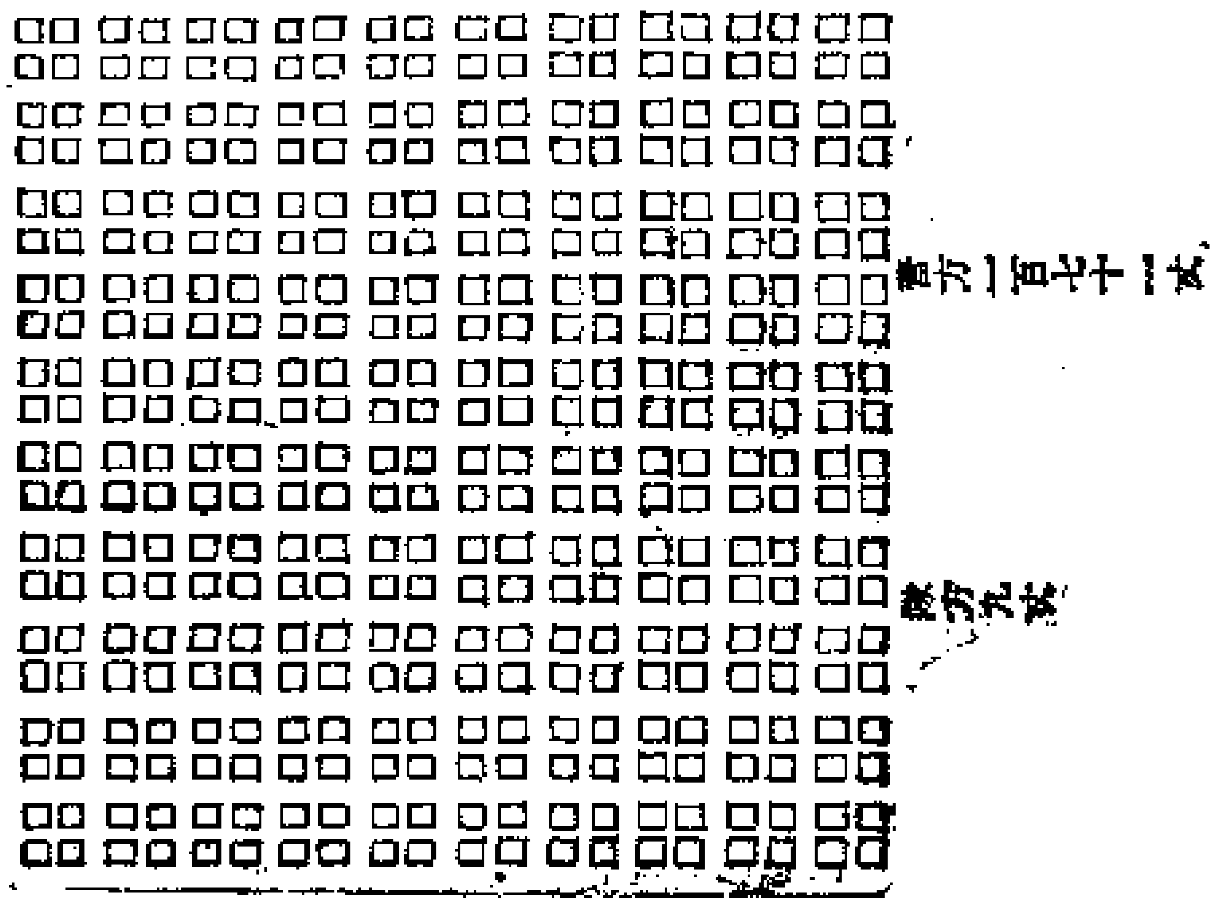
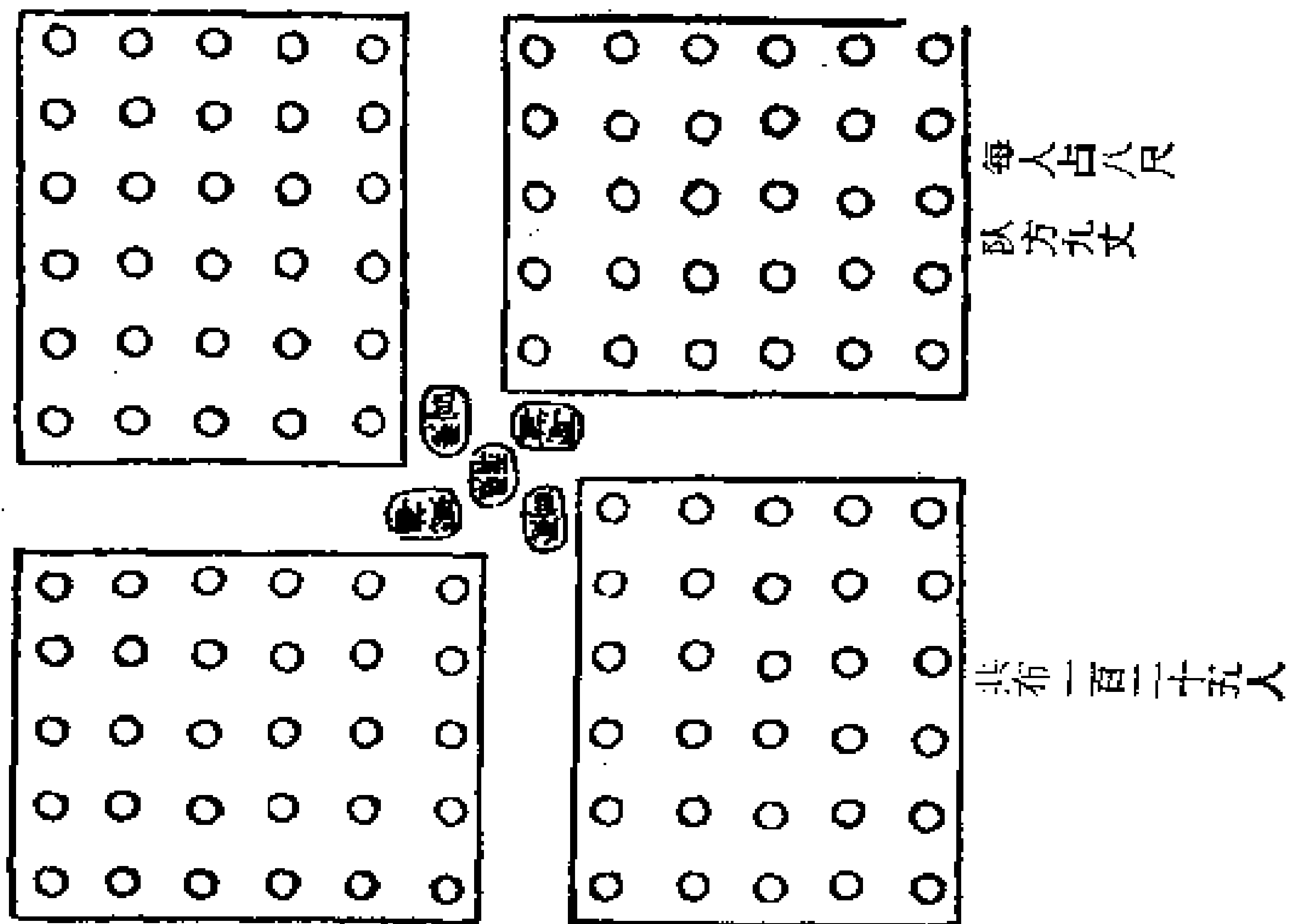


图 44　方营总图



队中四眼，各立三十人，队心，立五人。

图 43　方营各队图

$$营方面=x_1x \tag{γ}$$

【原草】 草曰：置人占8尺自乘，得64尺，为人占方幂．以乘每队125人，得8000尺，为实．以1为隅，开平方，步法常超一位，今隅超一度，至实之百下，约实，置商80尺，以商80生隅1，得80，为方，乃命上商除实讫，实余1600．次以商生隅入方，得160毕，方一退，隅再退之，复于上商之次，续商9尺．乃以续商9生隅1，入方，得169，乃命续商除实讫，得89尺，不尽79尺，就为90尺，得队方面．次置33队，乘3将，得99，又4因，得396，增3，得399，为实．以2为从方，1为从隅，开平方，步法以从方进一位，至实之十下，隅超一位，至实之百下，乃约实，置商10队．以商10生隅1，入方，得12，乃命上商除实讫，实余279．又以商10生隅入方，得22毕，方一退，隅再退之，续于实上商9队．以续商9生隅，

人占方8尺　人占方8尺　人占方幂64尺　方幂乘队得实	方幂64尺　每队125人　实8000尺　以一为隅，开平方．	商0尺　实8000尺　0方　1隅　隅超一位，方进一位．	商80尺　实8000尺　0方　1隅　商数与隅相生

商 三〇尺	商 三〇尺	商 三〇	商 三乂
实 三〇〇〇尺	实 一丅〇〇余	实 一丅〇〇	实 一丅〇〇
方 Ⅲ〇	方 Ⅲ	方 一丅	方 Ⅰ丄〇
隅 Ⅰ	隅 Ⅰ	隅 Ⅰ	隅 Ⅰ
乃命除实。	商隅又相生，增入方。	方一退，隅二退。	续商数与隅相生。

商 三乂	商 三乂	队方面〇尺 上乂	乂队 乂	商〇队
实 一丅〇〇	实 三乂	队 Ⅲ 中三Ⅱ	因率 Ⅲ	实 Ⅲ队 Ⅲ乂Ⅲ
方 Ⅰ丄乂	方 Ⅰ丄乂	溶 Ⅲ 下	得 丅 Ⅲ乂	从方 Ⅱ
隅 Ⅰ	隅 Ⅰ		增 Ⅲ	从隅 Ⅰ
乃命除实。	收不尽为尺，入商得九十尺。	以中乘下得，后上队。	以上乘副，得次；以下并次，得实。	方一进，隅再进，商一进。

步骤	商	实	方	隅	说明
一	〇〇	实	方	隅	约商置率。
二	一〇	实	方	隅	以商生隅，入方。
三	一〇	实	方	隅	以方命商，除实。
四	一〇	实	方	隅	以商生隅，入方。
五	一〇	实	方	隅	方一退，隅再退。

步骤	商	实	方	隅	说明
六	〇	实	方	隅	续商九。
七	商	实	方	隅	以商生隅，入方。
八	商	实	方	隅	以商命方除实。
九	商	〇〇〇	方	隅	开尽，商为队数。
十	得……队	队方面……〇尺	得……〇尺	营方……丈	上乘副，为营方积尺，以次退位，为营积丈。

入方，得 31，乃以命续商，除实，适尽．得 19，乘队方面 90，得 1710 尺，展为营方 171 丈．合问．

【新释】　已知：$a=8$ 尺，$k=125$ 人，由(α)式，得

$$x_1^2=125\times 8^2=8000,\ 或\ x_1^2-8000=0.$$

$$
\begin{array}{r|l}
1+\quad 0-8000 & \\
80+6400 & 80 \\
\hline
1+\ \ 80-1600 & \\
80 & \\
\hline
1+160-1600 & \\
9+1521 & 9 \\
\hline
1+169-\quad 79 &
\end{array}
$$

因得　　$x_1=89^+$ 尺．

今就为全数，使

$$x_1=90\ 尺=9\ 丈.$$

又知：$m=3$，$n=33$，由(β)式，得

$$x^2+2x-(4\times 3\times 33+3)=0$$

$$x^2+2x-399=0.$$

$$
\begin{array}{r|l}
1+\ \ 2-399 & \\
10+120 & 10 \\
\hline
1+12-279 & \\
10 & \\
\hline
1+22-279 & \\
9+279 & 9 \\
\hline
1+31+\quad 0 &
\end{array}
$$

因得　　$x=19$.

由(γ)式，得　　营方面$=9\times 19=171$ 丈．

65．方变锐陈

问步兵五军，军一万二千五百人，作方陈．人立地方八尺，欲变为前后锐陈，陈后阔，令多元方面半倍．陈间仍容骑路五丈以上，顺锐形出入．求方陈面，锐陈长，及前后锐陈各布兵几何？

答曰：方面二百丈．　　　　方面布兵，二百五十人．

每方目为十丈
一面目为大方
每面目五十人
共立二百五十人

图45　方阵

锐后广　锐通长　各三百丈
計立六万二千五百人
外锐广七十二丈
内锐广与長同
外锐广七十二丈
睛路五丈二尺
睛路五丈二尺
外锐四万五千八百四十七人
内锐一万六千六百五十三人

图46　锐阵

锐后广，三百丈。 锐广列兵，三百六十二人。

锐通正长，三百丈。 骑路二条，各阔五丈二尺。

内锐陈广，一百四十五丈六尺，列一百八十二人。

长，一百四十五丈六尺，

计布兵，一万六千六百五十三人。

外锐两广，各七十二丈，列九十人。

计布兵，四万五千八百四十七人。

术曰：以少广求之。置兵，开平方，得方面人数。开不尽方，为补队。以人立尺数乘之，为元方面。置元方面，以欲多数加之，为锐后阔，亦为通长。倍马路，减之，余为实。以人立尺约为阔布兵。不尽，辈归马路。以四约阔布兵，得外锐一边人。倍一边人，并不归，为内锐长阔人数。副置，加一，以乘其副，得数，半之，为内锐布兵。以减总兵，余为外锐布兵。

【新释】 设步兵 k 军，每军 a 人，每人立地方 b 尺，方阵每面人数为 x_1，方阵面为 y_1，则

$$x_1^2=ka \tag{α}$$

$$y_1=bx_1 \tag{β}$$

今欲变为锐阵，设锐阵后阔 y_2 多元方面 p 倍，立 x_2 人，阵间容骑路 q 丈以上，顺锐形出入，则

$$x_2=\frac{y_1(1+p)-2q}{b} \tag{γ}$$

设(γ)式中不尽之数为 r，辈归骑路，则骑路

$$q'=q+\frac{r}{2} \tag{δ}$$

复设外锐一边人数为 x_3，则

$$x_3=\frac{x_2}{4} \tag{ε}$$

设(ε)式中不尽人数为 s，则内锐阵广布兵数

$$x_4=2x_3+s \tag{ζ}$$

又设内锐阵布兵为 A_1，外锐阵布兵为 A_2，则

$$A_1=\frac{x_4(x_4+1)}{2} \qquad (\eta)$$

$$A_2=ka-A_1 \qquad (\theta)$$

【注】 严格说来，外锐阵布兵应为

$$A_2=\frac{\left(2x_3+\frac{2q'}{b}+x_4\right)\left(2x_3+\frac{2q'}{b}+x_4+1\right)}{2}-\frac{\left(\frac{2q'}{b}+x_4\right)\left(\frac{2q'}{b}+x_4+1\right)}{2} \qquad (\theta')$$

把实际结果代入后，得

$$A_2=\frac{375\times376}{2}-\frac{195\times196}{2}$$
$$=70500-19110=51390 \text{ 人}.$$

而由(θ)式所给的结果为 45847 人．因此若欲保持正锐阵的后阔多元方面半倍，且骑路：50 尺$\leqslant q<$54 尺，则锐阵人立尺数必大于 b．若欲保持人立尺数为 b，且锐阵后阔多元方面半倍，则可将骑路条件略事变更：$q\geqslant$5 丈．宋景昌根据这个原则给出了一个结果："内锐阔长 179 人．骑路阔 20 人，外锐后阔 78 人"．核验之仍然不符．实际上，可将外锐外层人数 375+374=749，并内锐内层人数 2+1=3，得 752 为法，以除总兵 62500 人，得 83，为外锐后阔人数．不尽 84 人，为补队兵．而内锐阔长为 2×83=166 人．骑路：

$$q'=\frac{1}{2}\times[(375-1)-2\times(83-1)-(166-1)]\times8$$
$$=180 \text{ 尺}=18 \text{ 丈}.$$

【原草】 草曰：置一军 12500，以 5 军因之，得总兵 62500 人，为实．开平方，得 250 人，以人立 8 尺乘之，得方面 200 丈．置 200 丈，加半倍 100 丈，得 300 丈，为锐陈后阔，亦为锐陈通长．先倍骑路 5 丈，得 10 丈，以减后阔 300 丈，余 290 丈，为实．以人立

8 尺约之，得 362，为锐后阔布兵．不尽 4 尺，以半之，得 2 尺，辈归骑路，作 5 丈 2 尺．以 4 约锐后阔布兵 362 人，得 90 人，为外锐一边人．倍一边 90，得 180，并不尽 2 人，共得 182 人，为内锐广布兵数，亦为长布兵．副置，加 1，得 183，乘副 182，得 33306，以半之，得 16653 人，为内锐阵布兵．以减总兵 62500，余 45847 人，为外锐兵．

商 ‖○○	商 ○○	商 ○	副军
⊤=Ō○○	实 ⊤=Ō○○	⊤=Ō○○	Ⅰ=Ō○○ 人
○ 方	○ 方	○ 方	实 ⊤=Ō○○ 总军
Ⅰ 隅	Ⅰ 隅	Ⅰ 隅	Ⅰ 隅
约实，置商，生隅入方．	隅再超一位．	隅超一位．	上乘副得次．

商 ‖○○	商 ‖○○	商 ‖○○	商 ‖○○
实 ‖=Ō○○	实 ‖=Ō○○	实 ‖=Ō○○	次 ⊤=Ō○○
×○○ 方	||||○○ 方	‖○○ 方	‖○○ 方
Ⅰ 隅	Ⅰ 隅	Ⅰ 隅	Ⅰ 隅
续商生隅，入方．	方一退，隅再退	以商生隅，入方．	以方命商，除实．

商	方方面阵	方方面阵
‖○○	‖ ○	‖○○上 人
实 ‖=○○○	空 ○○○○○	副 人立而尺
×○○ 方	×‖‖‖‖ 方	次 方阵面阔 =○○○ 丈
ǀ 隅	ǀ 隅	下 半倍方面 —○○○ 丈
以方除实，命商	开方尽得队面	上乘副，得次；次并上，得后下

锐阵后阔 / 锐阵长通	锐后阔	得	外锐一面
≡○○○ 丈	‖⊥‖ 布兵	‖上 尺	○ 人 文
倍阔阵 ǀ○○ 丈	不尽 × 尺	骑路尺数 ≡○中 尺	‖‖‖⊥‖ 人
实余 =×○○ 丈尺	‖ 半法	骑路定 ○‖下 尺	× 法
人立 ≡ 尺	得 ‖‖‖ 尺		不尽 ‖ 人
以副减上，以下除得次，得后	不尽约之	以上并中，得下	以次除副，得上

‖ 倍	内锐广 丨≐‖ 布兵	得 丨≐Ⅲ	内锐 丨⊥T○Ⅲ
外锐边 ○ 边文	内锐兵长 丨≐= 布	副 丨≡‖	T=Ō○○ 总兵
得 丨≐○ 人	丨 加	Ⅲ≡Ⅲ○T 人	外锐 Ⅲ○Ⅲ≡T 布兵
不尽 ‖ 人	得 丨≐Ⅲ	‖ 半法	
以上乘副，得次，以下并次，得后上。	以次并副得下，乃为后上。	以上乘副得次，以下除次，得后上。	以中减上得下。

【新释】：已知：$k=5$，$a=12500$ 人，$b=8$ 尺，由(α)式，得

$$x_1^2=5\times 12500=62500.$$

开平方，得

$$x_1=250 \text{ 人}.$$

由(β)式，得方阵面

$$y_1=8\times 250=2000 \text{ 尺}=200 \text{ 丈}.$$

次知：$p=\frac{1}{2}$，$q=5$ 丈，由(γ)式，得

$$x_2=\frac{2000\times\left(1+\frac{1}{2}\right)-2\times 50}{8}=362 \text{ 人}.$$

余数 $\gamma=4$ 尺，由(δ)式，得骑路

$$q'=50+\frac{4}{2}=52\text{ 尺}.$$

由(ε)式，得外锐一边人数：

$$x_3=\frac{362}{4}=90\text{ 人}.$$

余数 $s=2$ 人，由(ζ)式，得内锐阵广布兵数：

$$x_4=2\times90+2=182\text{ 人}.$$

由(η)式，得内锐阵布兵：

$$A_1=\frac{182(182+1)}{2}=16653\text{ 人}.$$

由(θ)式，得外锐阵布兵：

$$A_2=62500-16653=45847\text{ 人}.$$

66．计布圆阵

问步卒二千六百人，为圆阵．人立圆边九尺，形如车幅，鱼丽布阵．陈重间，倍人立圆边尺数，须令内径七十二丈．圆法用周三

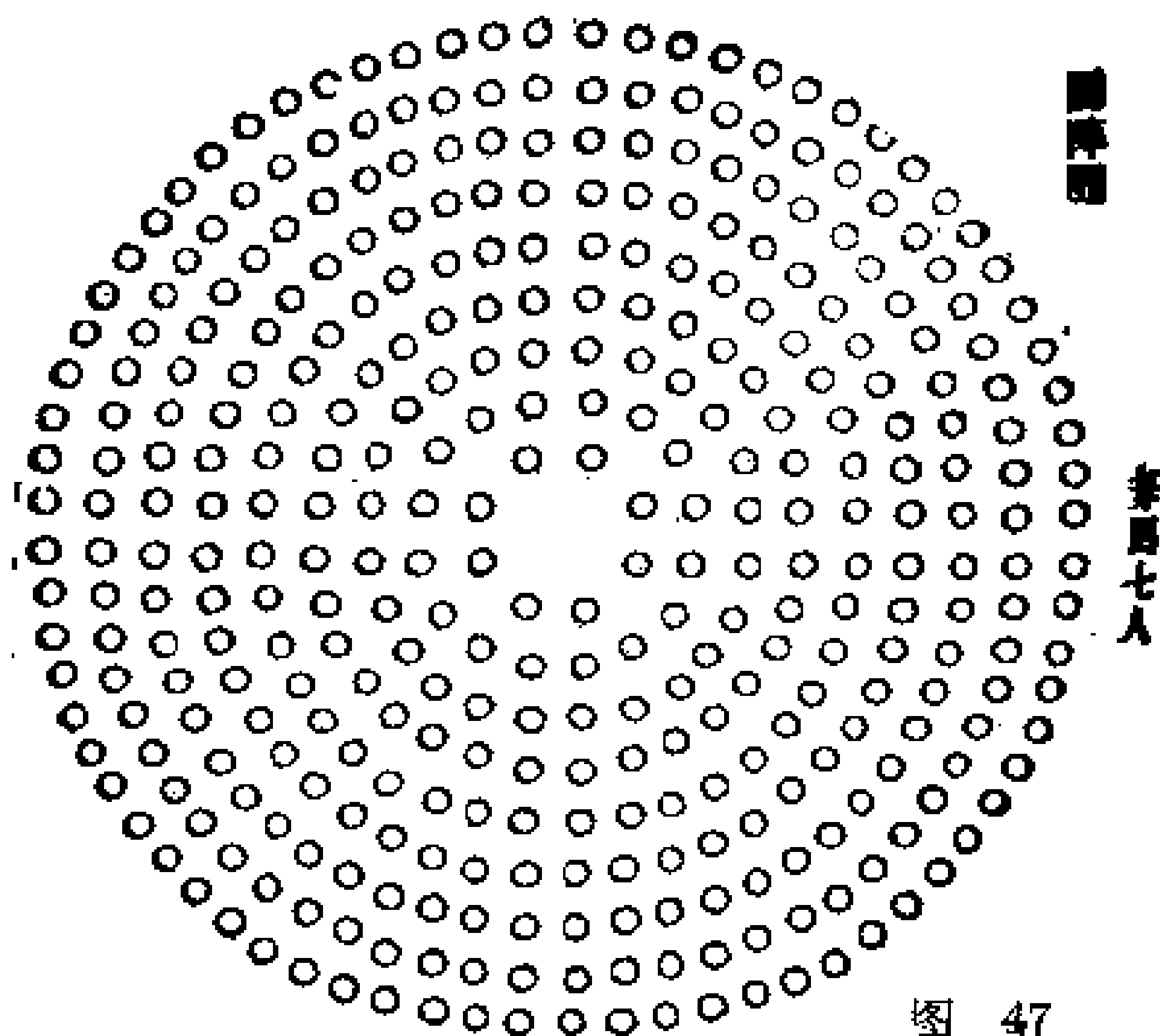


图 47

径一之率．欲知陈重几数，及内外周通径，并所立人数，各几何？

答曰：内周二百一十六丈，

立二百四十人．

外周三百二丈四尺，

立三百三十六人．

通径．一百丈八尺．

阵计九重．不尽八人．

术曰：以商功求之．以圆率因内径，为内周．以人立尺约之，为内周人数．乃以圆束差率为隅，次置内周人，减隅，余为从方．列兵数为实．开平方，得重数．不尽，为余兵．置重数，减一，余四因，又乘圆边尺数，并内径，共为通径．以圆率因通径，得外周．

一	二	三	四
圆率 |||	内周立人数 ||Ⅹ〇	||≡Ⅹ 从方	商 〇
内径 ㅠ=〇 丈	实 =|⊥〇	内周人 ||Ⅹ〇	实 =T〇〇 兵数
得 =|⊥〇 尺为内周	圆旁法 Ⅹ尺	圆差 T 后隅	||≡Ⅹ 从方
			T 隅
上乘中得下．	下除中得上为后中．	以下减中得上．	以方约实置商九．

商〤	商〤	重〤上	得≡‖	通径一○○Ⅲ尺
实⚌⊤○○人	不尽Ⅲ余兵	减Ⅰ副	圆旁〤	Ⅲ因率
‖≐Ⅲ方	‖≐Ⅲ方	余Ⅲ次	得‖≐Ⅲ尺	外周≡○=〤尺
⊤隅	⊤隅	法Ⅲ下	内径ㅠ=○	圆边〤
以商生隅入方。	不尽为余兵。	以副减上。得次以下乘次，得后上。	以上乘副，得次以下并次，得后上。	以圆边除外周得外周人数。

【新释】：设令内径为 d_1，内周为 c_1，$\pi=3$，则

$$c_1=3d_1 \qquad (\alpha)$$

又设人立圆边尺数为 a，阵重间距离为 a'，重数为 x，圆束差为 r，内周人数为 n_1，步卒人数为 b，则

$$n_1=\frac{c_1}{a} \qquad (\beta)$$

又
$$\frac{\left\{n_1+\left[n_1+(x-1)\cdot\frac{a'}{a}\cdot r\right]\right\}x}{2}=b.$$

化简上式，得 $a'rx^2+(2an_1-a'r)x-2ab=0$。

本问 $a'=2a$，全式以 $2a$ 约之，得

$$rx^2+(n_1-r)x-b=0 \qquad (\gamma)$$

开方不尽之数为余兵.

次设外径为 d_2, 外周为 c_2, 外周人数为 n_2, 则

$$d_2=d_1+2(x-1)a'=d_1+4(x-1)a \qquad (\delta)$$

而

$$c_2=3d_2 \qquad (\varepsilon)$$

$$n_2=\frac{c_2}{a} \qquad (\zeta)$$

【原草】: 草曰: 以圆率 3, 因内径 72 丈, 得 2160 尺, 为内周. 以圆边 9 尺约内周, 得 240, 为内周人数. 乃以圆束差 6, 为从隅. 次置内周 240 人, 减隅, 余 234, 为从方. 列兵 2600, 为实. 开平方, 步法, 从方进一位, 隅法超一位, 今方隅皆不可超进, 乃于实约商, 置 9 重. 以商生隅 6, 得 54, 增入从方内. 共得 288, 乃命上商 9 重, 除实讫, 实余 8 人, 为余兵. 副置 9 重, 减 1, 余 8, 以 4 因之, 得 32, 又乘圆边 9 尺, 得 288 尺. 并内径 720 尺, 得 1008 尺, 为通径. 又以圆率 3, 因通径, 得 3024 尺, 为外周. 次以圆边 9 尺为法, 除外周尺数, 得 336 人, 为外周人数. 合问.

【新释】: 已知: $d_1=72$ 丈, 由(α)式, 得内周

$$c_1=3\times72=216 \text{ 丈}.$$

又知: $a=9$ 尺, $a'=2a=18$ 尺, $r=6$, $b=2600$ 人, 由(β)式, 得内周人数:

$$n_1=\frac{216}{0.9}=240 \text{ 人}.$$

由(γ)式, 得

$$6x^2+234x-2600=0.$$

$$\begin{array}{r|l} 6+234-2600 & \\ 54+2592 & 9 \\ \hline 6+288-\quad 8 & \end{array}$$

$$\therefore\quad x=9 \text{ 重}.$$

余 8 人为余兵.

由(δ)式，得外径(通径)：

$$d_2 = 720 + 4 \times 8 \times 9 = 1008 \text{ 尺}.$$

由(ε)式，得外周：

$$c_2 = 3 \times 1008 = 3024 \text{ 尺}.$$

由(ζ)式，得外周人数：

$$n_2 = \frac{3024}{9} = 336 \text{ 人}.$$

第十六卷 凡 六 问

67. 圆营敷布

问周制一军，欲布圆营九重．每卒立圆边六尺，重间相去，比立尺数倍之．于内摘差兵四分之一出奇，不可缩营示弱，须令仍用元营布满余兵．欲知元营内外周，及立人数，并出奇后，每卒立尺数，内外周人数(原为"每卒数，立尺数，外周人数".)各几何?

答曰：周制一军，

一万二千五百人．

出奇，

三千一百二十五人．

元内周，

八百四丈，

立一千三百四十人．

元外周，

八百六十一丈六尺，

立一千四百三十六人．

出奇后．

元外周，立一千八十九人，

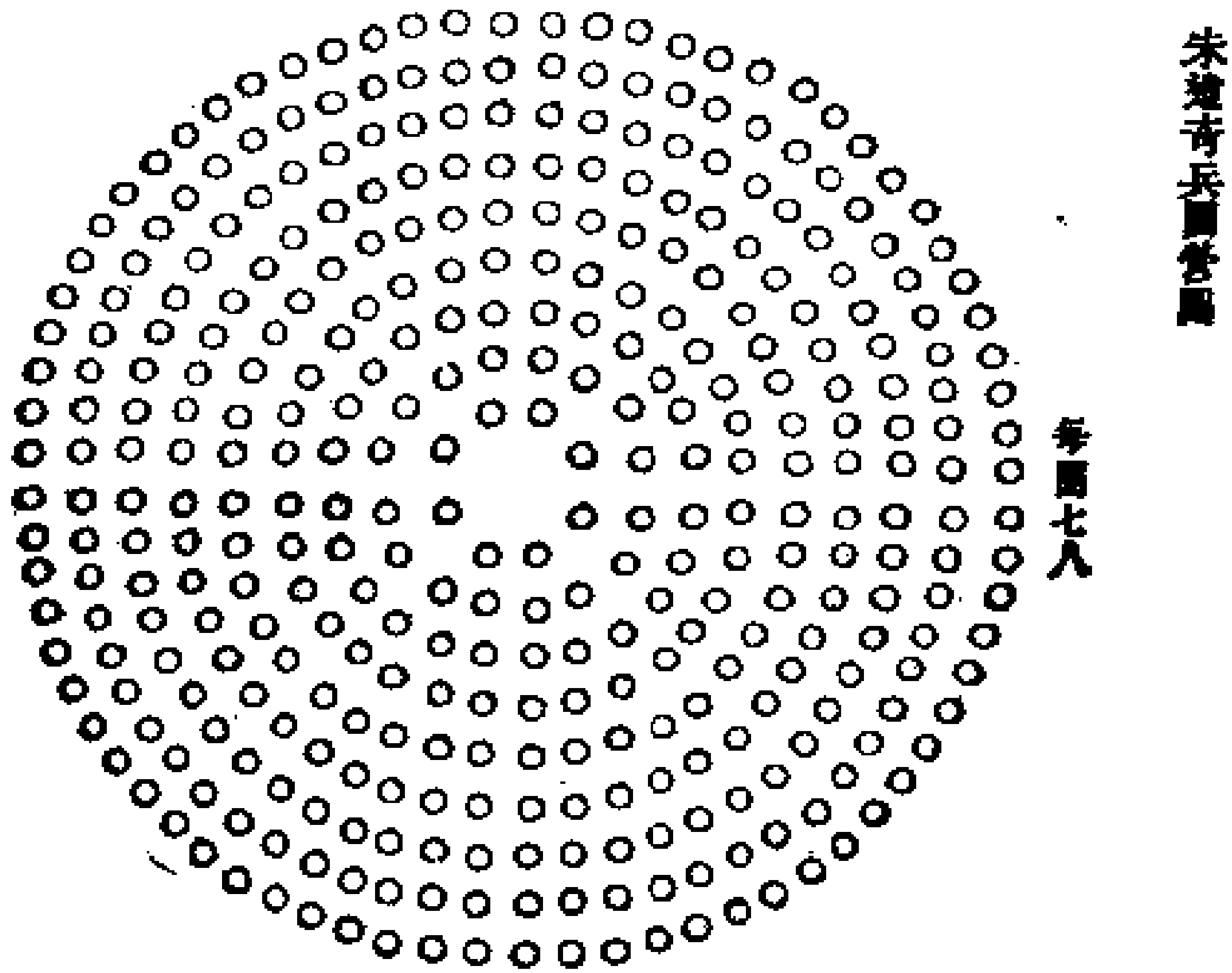


图48 未遣奇兵圆营图

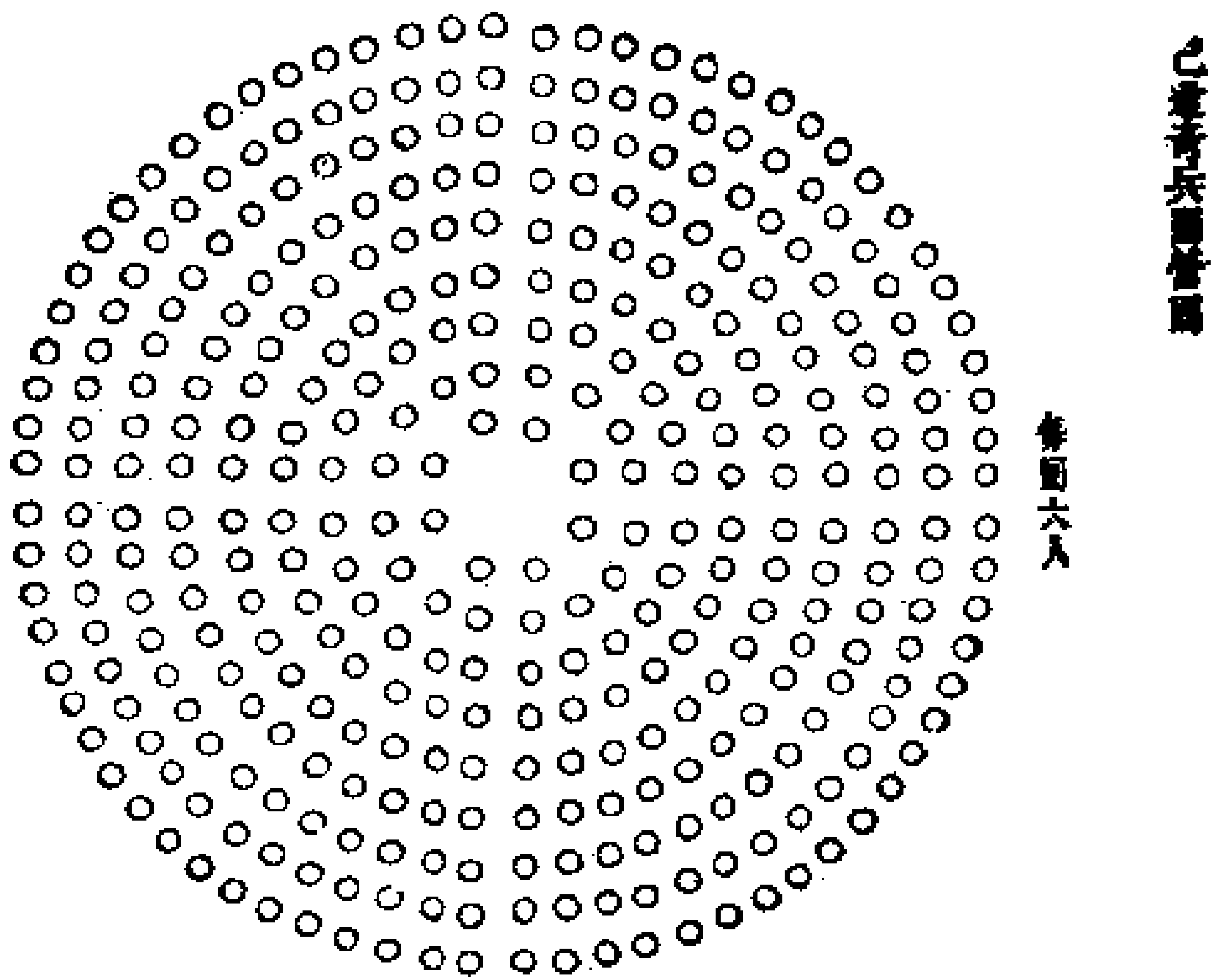


图49 已遣奇兵圆营

元内周，立一千一十六人，

内外周，人立七尺九寸一分.

术曰：以商功求之，置重数，减一，余为段．以段乘圆差，为衰．以衰乘重数，为率．求元周，以率减兵，余如重数而一，得内周人数，不满为余兵．以人立圆边，乘内周人，得内周尺．倍衰，乘圆边，为泛．以泛并内周尺，得外周尺，为实．如圆边而一，得外周人．求出奇后，以率加存兵，如重数而一，得外周人，不满为余兵．以外周人，约元外周尺，得后立尺．以后立尺，约元内周，得内周人．

【新释】　设周制一军人数为 b，欲布圆营重数为 n，每卒立圆边尺数为 k，重间相去为 k'，摘差兵数为元兵数的 $\frac{p}{q}$，圆束差为 r，内周人数为 m_1，则

$$nm_1=b-\frac{\frac{k'}{k}\cdot rn(n-1)}{2}$$

或

$$m_1=\frac{b-\frac{k'rn(n-1)}{2k}}{n} \tag{α}$$

式中余数为余兵．又设内周尺数为 s_1，则

$$s_1=km_1 \tag{β}$$

次设外周尺数为 s_2，外周人数为 m_2，则

$$s_2=s_1+\frac{k'}{k}\cdot r(n-1)\cdot k \tag{γ}$$

$$m_2=\frac{s_2}{k} \tag{δ}$$

复设出奇后外周人数为 m_2'，每卒立圆边尺数为 k_1，则

$$m_2'=\left[b\left(1-\frac{p}{q}\right)+\frac{\frac{k'}{k}\cdot rn(n-1)}{2}\right]\Big/n \tag{ε}$$

式中余数为余兵．而每卒立圆边尺数

$$k_1=\frac{s_2}{m_2'} \qquad (\zeta)$$

又设内周人数为 m_1'，则

$$m_1'=\frac{s_1}{k_1} \qquad (\eta)$$

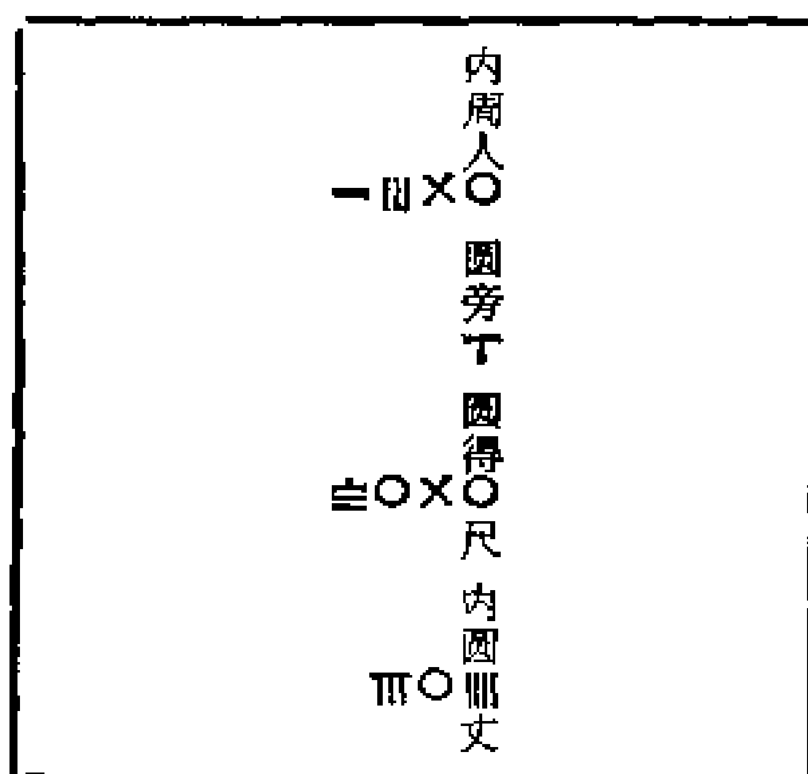
【原草】　草曰：置 9 重，减 1，余 8，为段．以乘圆束差 6，得 48，为衰．乘 9 重，得 432，为率．

衰 ×Ⅲ 重 Ⅲ 率 ×≡‖	重数 × 减 Ⅰ 余 Ⅲ 为段 圆束差 ⊤

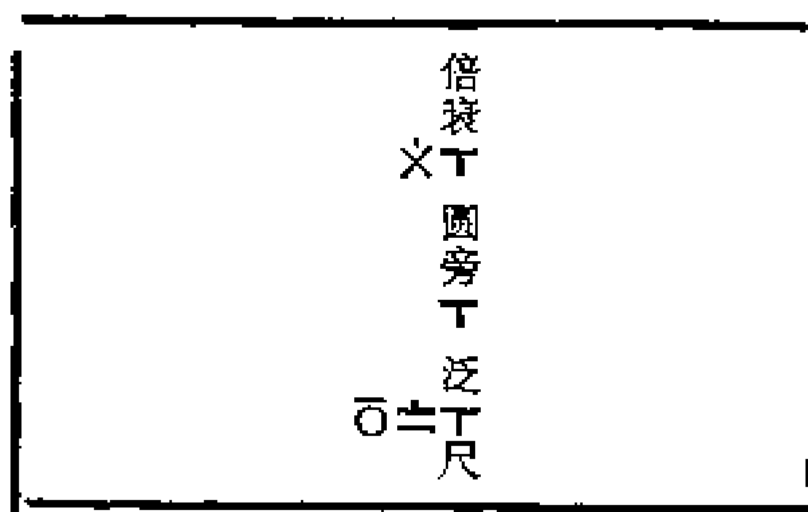
求元周，以率 432，减周制一军 12500，余 12068，为实．如重数 9 而一，得 1340 人，为内周人数．不满 8 人，以为余兵之数．

内周人 一Ⅲ×○ 余兵 Ⅲ 又法	率 Ⅲ≡‖ 周制军 Ⅰ‖Ō○○人 实 Ⅰ=○⊥Ⅲ 重数 Ⅲ 法

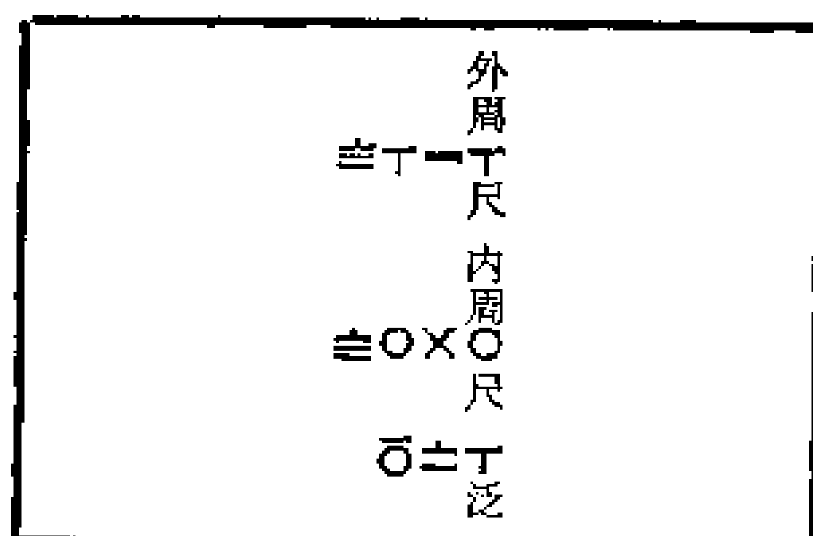
次以人立圆边 6 尺，乘内周人 1340，得 8040 尺，收作 804 丈，为内周尺数.



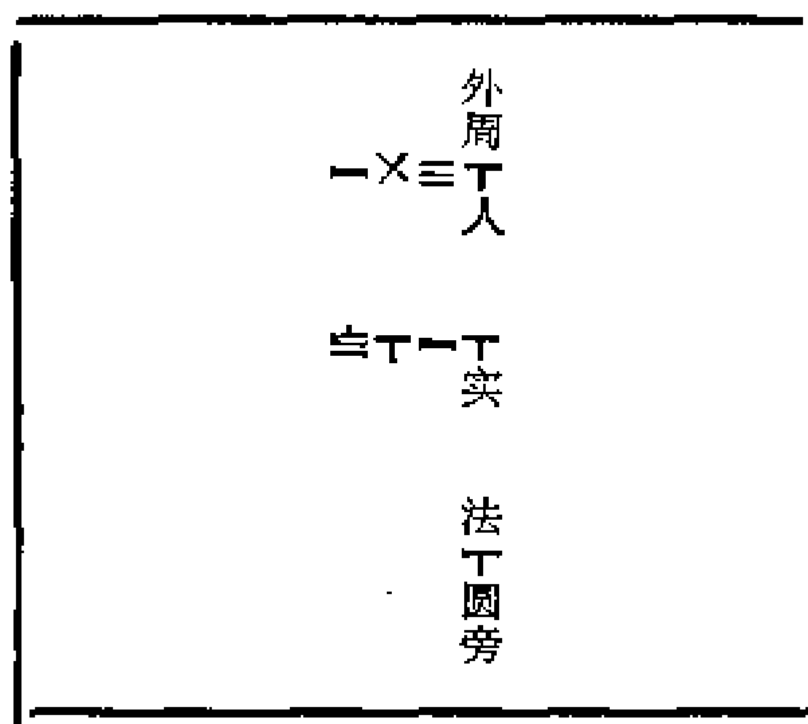
倍衰 48，得 96，乘圆边 6 尺，得 576 尺，为泛.



以泛 576 尺，并内周 8040 尺，得 8616 尺，为外周尺.



以外周尺 8616，为实. 如圆边 6 尺而一，得 1436 人，为外周人数.



求出奇后，以奇母 4，约军 12500，得 3125，为奇兵．以减总军，余 9375，为存兵．以次率 432 加之，得 9807 人，为实．如重数 9 而一(原脱"一"字)，得 1089，为外周人，不尽 6．

外周人	商	奇兵	出奇兵
不尽为余兵	实	总军	一军人
法	法 重	存兵	约
		率	

次以元外周 8616 尺，为实．以外周人 1089 约之，得 7 尺 9 寸 1 分．不尽 2 尺 1 分，与法求等，得 3，俱约之，为分下 363 分之 67．

置元内周 8040 尺，为实．以后立尺 7 尺 9 寸 1 分约之，得 1016，为内周人数．不尽 3 尺 4 寸 4 分，为宽地．

本术所求内外周之人数既定，不拘人奇出奇入，皆以六人为重差或累差，加减，各得诸重围数．或并九重人，课总军所存．

【新释】　已知：$b=12500$ 人，$n=9, k=6$ 尺，$k'=2k=12$ 尺，$\frac{p}{q}=\frac{1}{4}$，$r=6$．由(α)式，得内周人数：

$$m_1=\left[12500-\frac{12\times 6\times 9\times(9-1)}{2\times 6}\right]/9$$

$$=\frac{12500-432}{9}=1340 \text{ 人}.$$

余 8 人为余兵. 由(β)式,得内周尺数:

$$s_1=1340\times6=8040\ 尺=804\ 丈.$$

由(γ)式,得外周尺数:

$$s_2=8040+2\times6\times(9-1)\times6$$
$$=8616\ 尺=861\ 丈\ 6\ 尺.$$

由(δ)式,得外周人数:

$$m_2=\frac{8616}{6}=1436\ 人.$$

由(ε)式,得出奇后外周人数:

$$m_2'=\left[12500\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{12\times6\times9\times(9-1)}{2\times6}\right]\Big/9$$
$$=(9375+432)/9=9807/9=1089\ 人.$$

余 6 人为余兵. 由(ζ)式,得出奇后每卒立圆边尺数:

$$k_1=\frac{8616}{1089}=7\ 尺\ 9\ 寸\ 1\frac{67}{363}\ 分.$$

由(η)式,得出奇后内周人数:

$$m_1'=\frac{804000}{791}=1016\ 人.$$

不尽 3 尺 4 寸 4 分,为宽地.

68. 望知敌众

问敌为圆营,在水北平沙,不知人数. 谍称彼营布卒占地,方八尺. 我军在水南山原,于原下立表,高八丈,与山麓等平. 自表端引绳,虚量平至人足三十步,人立其处,望彼营北陵,与表端参合. 又望营南陵,入表端八尺. 人目高四尺八寸,以圆密率入重差,求敌众合得几何?

答曰: 敌众三万五千六百四十二人(原答:八百四十九人.).

术曰: 以勾股求之. 置表高并人目,乘(原无"表高并人目,乘"六字.)人退表步,又(原无"又"字.)乘入表,为实. 以入表并人

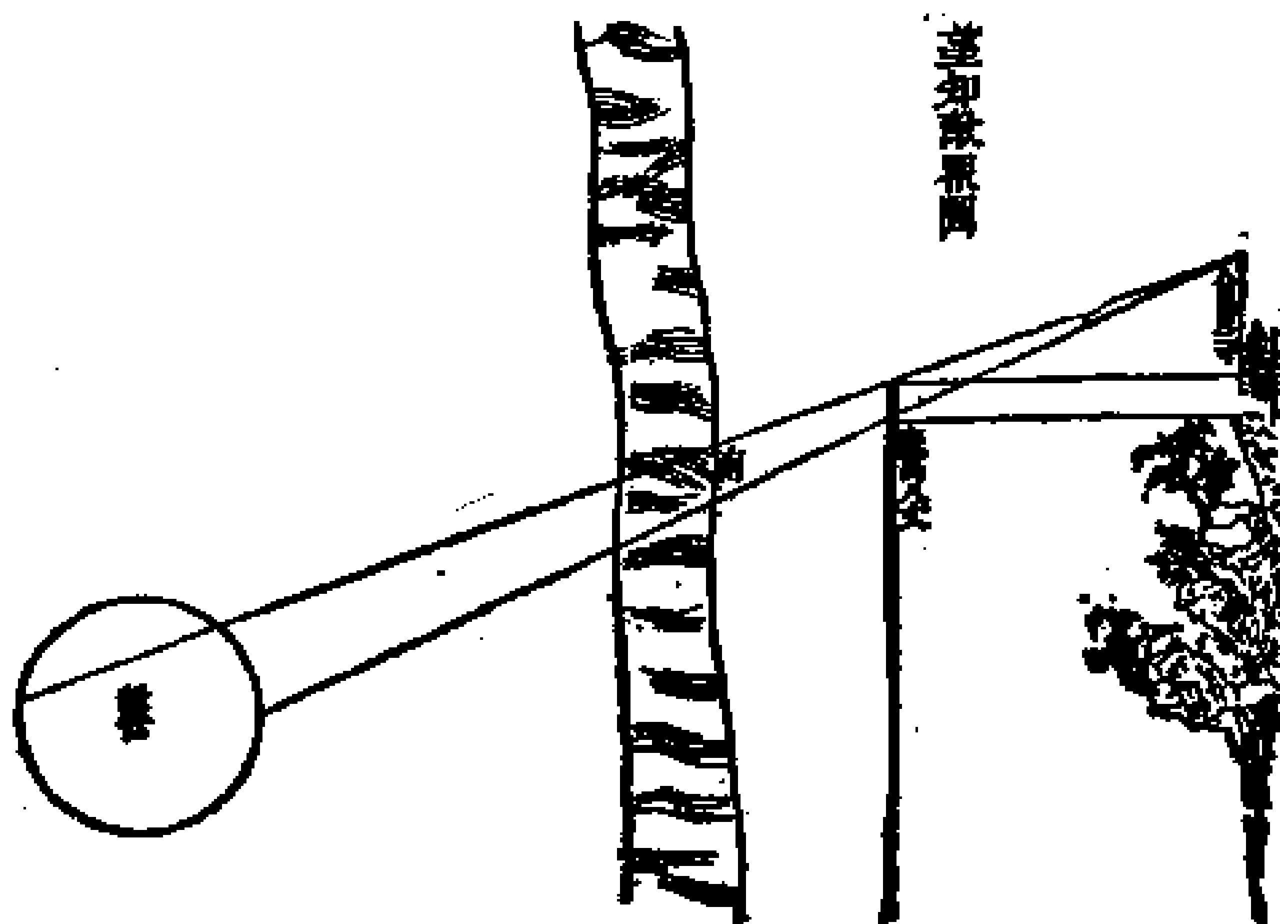


图50　望知敌众图

目，乘(原无"入表并人目，乘"六字．)人目高，为法．除之，得径．以密周率乘径，得数，为实．以密径率因人立，为法，约之，得外周人数，余收为一．副置，加六，以乘副，得数，为实．如一十二而一，余亦收为全．

【新释】　设营径为 x，营南陵至表为 D，表高为 h，人退表为 d，

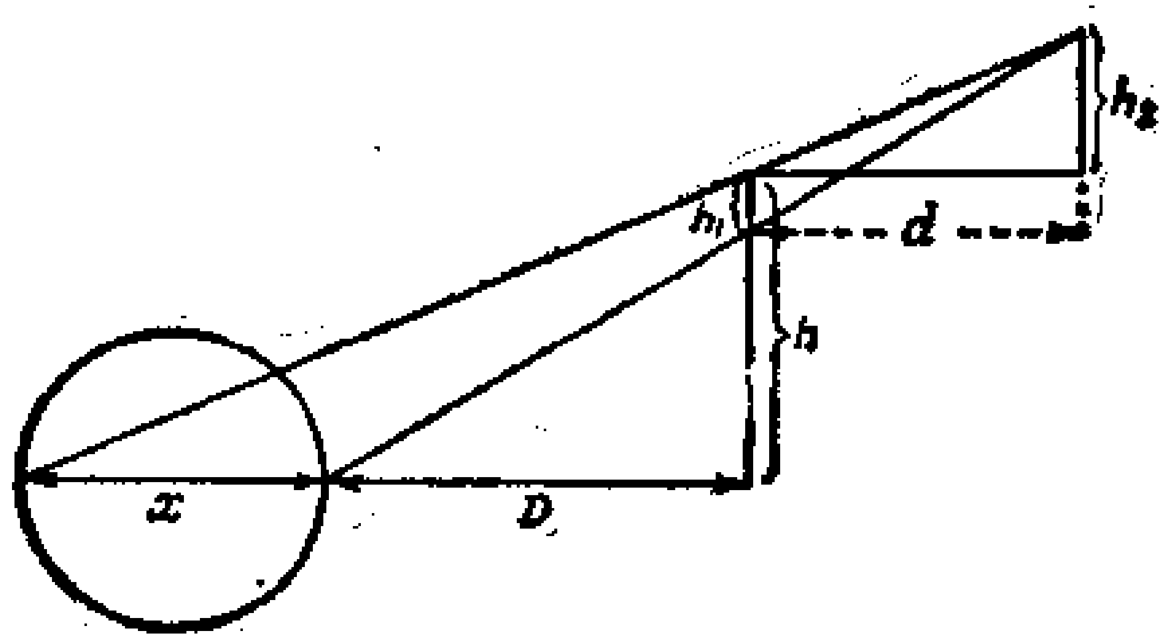


图　51

入表为 h_1，人目高为 h_2，由图 50 可得

$$\frac{x+D}{d}=\frac{h}{h_2} \qquad (\alpha)$$

及

$$\frac{D}{d}=\frac{h-h_1}{h_1+h_2} \qquad (\beta)$$

解(α)，(β)二式，消去 D，得

$$x=\frac{dh}{h_2}-\frac{d(h-h_1)}{h_1+h_2}=\frac{dh_1(h+h_2)}{h_2(h_1+h_2)} \qquad (\gamma)$$

x 既经求出，复设外周人数为 n，$\pi=\frac{22}{7}$，布卒占地为 b，则

$$n=\frac{\pi x}{b}=\frac{22x}{7b} \qquad (\delta)$$

又设圆束差为 r，则敌众

$$y=\frac{n(n+r)}{2r} \qquad (\varepsilon)$$

(ε)式的成立，请参考第十四卷"竹围芦束"。

【注 1】 秦氏本问致误的原因，是以

$$x=\frac{dh_1}{h_2} \qquad (\gamma')$$

求得 x 的。

【注 2】 宋景昌改正求营径法及数，均与本问所修正者相同。惟求人数时，因宋氏将 $\frac{375}{560}$ 弃去未计，遂致人数稍有出入。

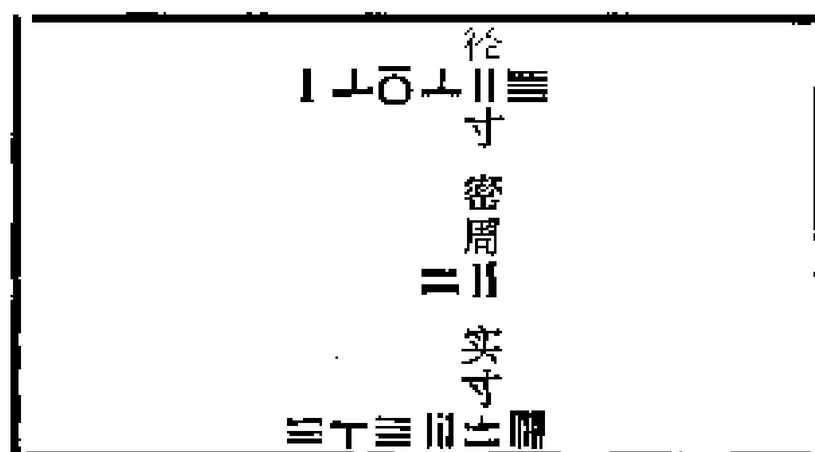
【原草】 草曰：置表高 8 丈，并人目 4 尺 8 寸，得 848 寸，乘(原无"表高 8 丈，并人目 4 尺 8 寸，得 848 寸，乘"诸字句。)人立退表 30 步，以步法 5 尺，展为 50 寸，通之，得 1500 寸，其积得 1272000 寸，又(原无"其积得 1272000 寸，又"诸字句。)乘入表 8 尺，得 10176 万寸(原为"得 12 万寸"。)，为实。

三	二	一
Ⅲ✕Ⅲ寸	人退表≡〇步	表高Ⅲ〇寸
得丨=Ⅱ=〇〇〇寸	步法卌尺	日高≣Ⅲ寸
入表≐〇寸	步法≣〇寸	得Ⅲ✕Ⅲ寸
实丨〇丨≐⊤〇〇〇〇寸	退表—卌〇寸	
前下乘上，得副；副乘次，得下实	上乘次，得下	上并副，得次

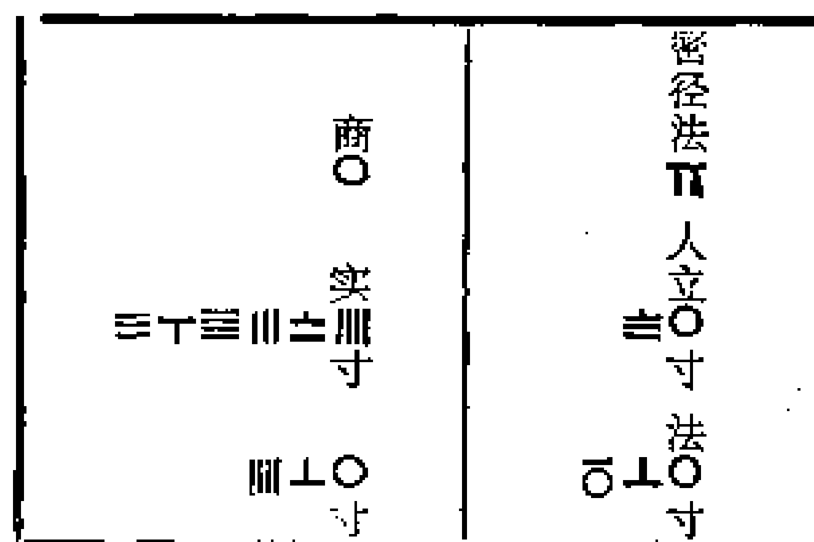
以入表80寸，并目高48寸，得128寸，以乘目高48寸，得6144寸，为法．除之，得径16562寸5分(此段原为"以人目高48寸，为法．除之，得径2500寸．")．

二	一
得法⊥丨≡Ⅲ寸	入表≐〇寸
径丨⊥〇⊥Ⅱ≣寸	目高✕Ⅲ寸
实丨〇丨≐⊤〇〇〇〇寸	得丨=Ⅲ寸
法⊥丨≡Ⅲ寸	人目✕Ⅲ寸
下除次，得副径	上并副，得次；次乘下，得后上

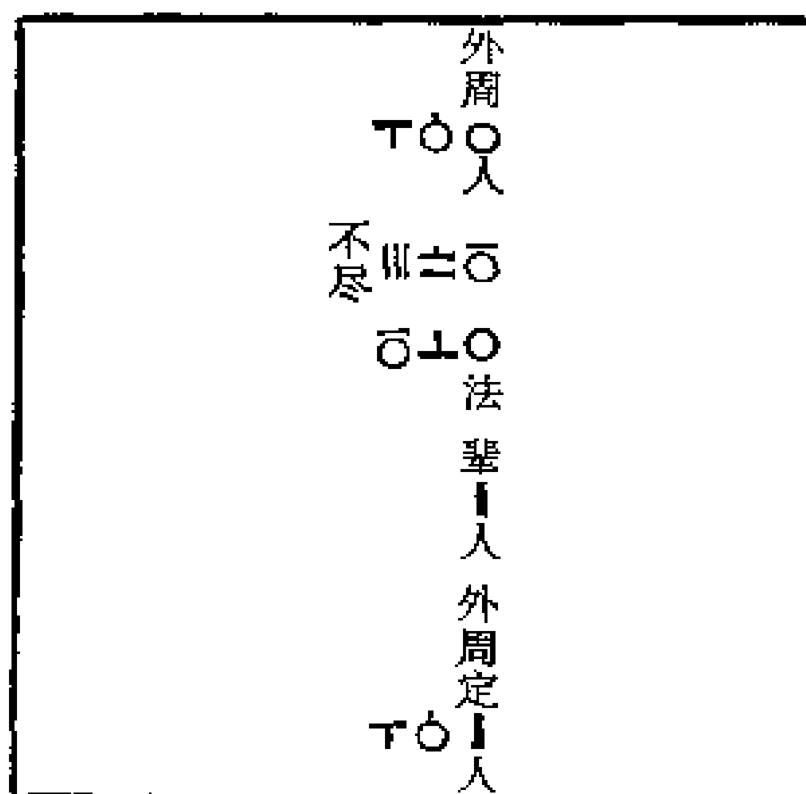
以密率周法 22，乘径 16562 寸 5 分（原为“2500”），得 364375 寸（原为“55000 寸.”），为实.



以密率径法 7，因谍称人立 8 尺，得 560，为法.



以法 560 寸，约实 364375，得 650 人，不尽 375 寸，在法半数以上，辈归 1 人，得 651 人，为外周人数(此段原为“以法 560 寸，约实 55000 寸，得 98 人，为外周人数，不尽 120 寸，弃之.”).



副置外周 651 人(原为“98 人”.),加 6,得 657 人(原为“104 人”.),乘副,为实.

副

正

圆差　人

得

商　实　人　法

以十二为法.

商　实　法

以法进一步.

商　实　法

法进二.

商　实　法

法进三.

商　实　法

法进四,商三万.

商　实　法

法退一,商五千.

商　实　法

法再退,商六百.

商　实　法

法又退,商四十.

敌众人　商

不尽弃数

法

得三万五千六百四十二,不尽,弃之.为敌众.

【新释】 已知：$h=800$ 寸，$d=30$ 步$=1500$ 寸，$h_1=80$ 寸，$h_2=48$ 寸，由(γ)式，得营径：

$$x=\frac{1500\times80\times(800+48)}{48\times(80+48)}=\frac{101760000}{6144}=16562.5\text{ 寸}.$$

又知：$b=80$ 寸，由(δ)式，得外周人数：

$$n=\frac{22\times16562.5}{7\times80}=\frac{364375}{560}=650\frac{375}{560}\doteq651\text{ 人}.$$

复知：$r=6$，由(ε)式，得敌众：

$$y=\frac{651\times(651+6)}{2\times6}=\frac{427707}{12}=35642\frac{1}{4}$$

$$\doteq35642\text{ 人}.$$

69. 均数徭役

问军成差坐烽摆粟舗，切虑差徭不均。今诸军共合差一千二百六十人，契勘诸军见管，前军六千一百七十人，右军四千九百三十六人，中军七千四百四人，左军三千七百二人，后军二千四百六十八人．各军合差几何？

答曰：前军．差三百一十五人．

右军，差二百五十二人．

中军，差三百七十八人．

左军，差一百八十九人．

后军，差一百二十六人．

术曰：以均输求之．置各军见管人，验可约，求等以约之．为衰。副并为法，以共合差数，乘列衰，各为实．实如法而一，各得．

【新释】 设诸军合差 N 人，前军现管 A_1 人，右军现管 A_2 人，中军现管 A_3 人，左军现管 A_4 人，后军现管 A_5 人，则各军合差

$$B_i=\frac{A_iN}{\Sigma A}\qquad(\alpha)$$

【原草】 草曰：置诸军见管，求等，得 1234，俱以约各见管，前

军得 5, 右军得 4, 中军得 6, 左军得 3, 后军得 2, 列为各衰. 副并诸衰, 得 20, 为法. 以共差 1260 人, 乘诸衰, 前军得 6300, 右军得 5040, 中军得 7560, 左军得 3780, 后军得 2520, 各为实. 皆如法 20 而一, 前军合差 315 人, 右军合差 252 人, 中军合差 378 人, 左军合差 189 人, 后军合差 126 人.

见管人		
前军	前军	前衰
右军	右军	右衰
中军	中军	中衰
左军	左军	左衰
后军	后军	后衰
求等	等数	法

	前实	前军
	右实	右军
	中实	中军
	左实	左军
	后实	后军
共差人	法	合差人

【新释】 已知：$N=1260$ 人，$A_1=6170$ 人，$A_2=4936$ 人，$A_3=7404$ 人，$A_4=3702$ 人，$A_5=2468$ 人，由(α)式，得各军合差：

$$B_1=\frac{6170\times1260}{6170+4936+7404+3702+2468}$$

$$=\frac{5\times1260}{5+4+6+3+2}=\frac{5\times1260}{20}=315\text{ 人，}$$

$$B_2=\frac{4\times1260}{20}=252\text{ 人，}$$

$$B_3=\frac{6\times1260}{20}=378\text{ 人，}$$

$$B_4=\frac{3\times1260}{20}=189\text{ 人，}$$

$$B_5=\frac{2\times1260}{20}=126\text{ 人.}$$

70. 先计军程

问一军三将，将十队，队七十五人，每将分左右兼，作九行，爬头拽行，每日六十里．明日路狭，以单兼拽行，至晚，欲先知宿程里数，合几何？

宿程𝍥里	𝍡𝍫〇步	商〇	𝍥	商〇	爬头𝍨行
零𝍡𝍫〇步	〇	𝍩𝍠𝍮〇步	不尽𝍥里	实𝍮〇里	单𝍠行
	𝍨法	𝍨法	里法𝍢𝍮〇步	𝍨法	𝍮〇里

答曰：六里二百四十步．

术曰：以均输求之．置行数为法，以单数一行，用乘日程里，为实．实如法而一，得宿程里步．

【新释】 设原行数为 a，原日程里为 l，明日行数为 a'，则宿程里步：

$$l'=\frac{la'}{a} \qquad (\alpha)$$

【原草】 草曰：置行数 9，为法．以单兼数 1 行，用乘 60 里，为实．实如法而一，得 6 里．不尽 6 里，以里法 360 步通之，得 2160 步，又为实．仍如法 9 而一，得 240 步，为 6 里 240 步宿程．

【新释】：已知：$a=9$，$l=60$ 里，$a'=1$，由(α)式，得明日宿程

$$l'=\frac{60\times1}{9}=6\frac{2}{3}\text{里}=6\text{里}240\text{步}.$$

71．军 器 功 程

问今欲造弓刀各一万副，箭一百万只．据功程，七人九日，造弓八张，八人六日，造刀五副，三人二日，造箭一百五十只．作院见管弓作二百二十五人，刀作五百四十人，箭作二百七十六人．欲知毕日几何？

答曰：造弓一万张，三百五十日．

造刀一万把，　　一百七十七日，九分日之七．

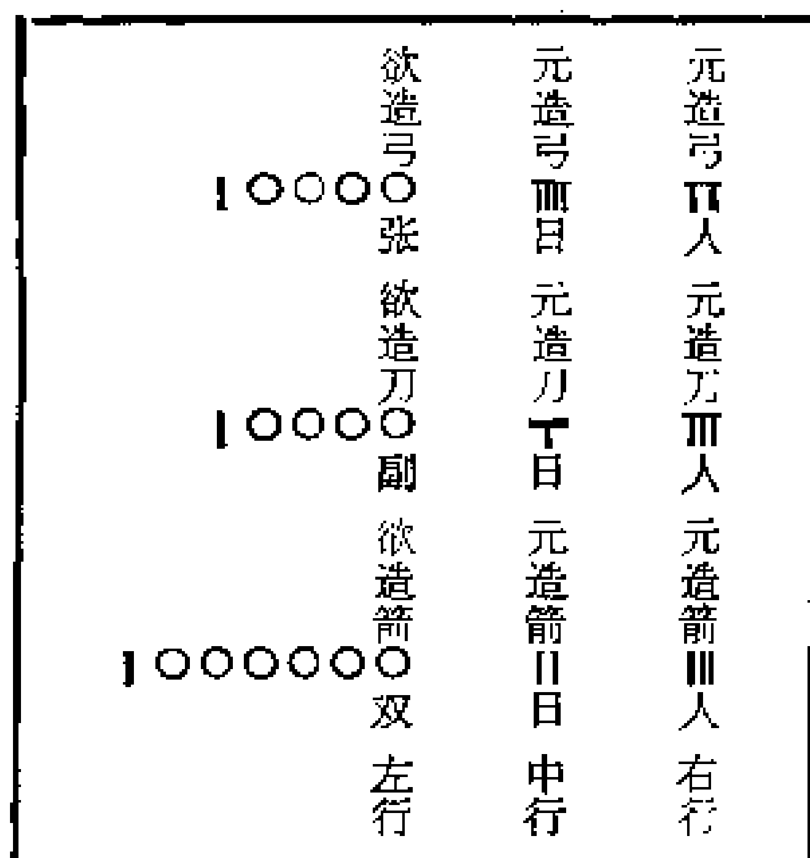
造箭一百万只，　　一百四十四日，六十九分日之六十四．

术曰：以粟米求之，互换入之．置各功程元人率于右行，置元日数于中行，置欲求数为左行．以三行对乘之，为各实，列右行．次置元物数于中行，置见管人为左行，以左行乘中行，各为法．以对除右行，各得日数．

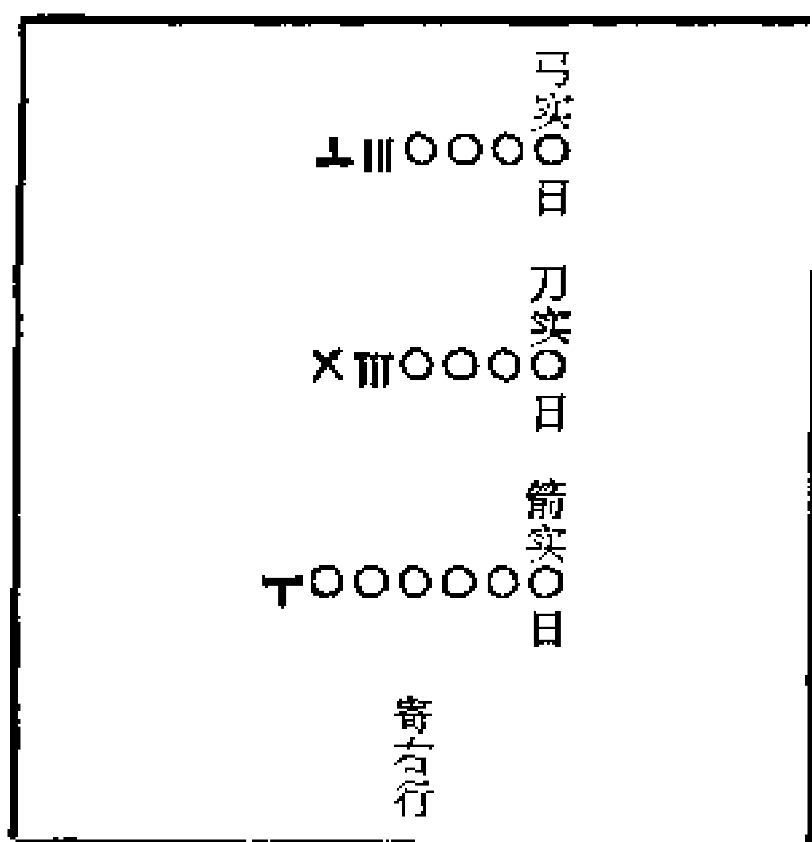
【新释】 设欲造弓 a_1 张，刀 a_2 把，箭 a_3 只；弓作 k_1 人 m_1 日造弓 n_1 张，刀作 k_2 人 m_2 日造刀 n_2 把，箭作 k_3 人 m_3 日造箭 n_3 只；作院现管弓作 b_1 人，刀作 b_2 人，箭作 b_3 人．则各军器完工日数：

$$d_i=\frac{a_ik_im_i}{b_in_i} \qquad (\alpha)$$

【原草】 草曰：置元造弓 7 人，造刀 8 人，造箭 3 人于右行．次置造弓 9 日，造刀 6 日，造箭 2 日，列中行．又置欲造弓 10000，欲造刀 10000，欲造箭 100 万，列左行．以三行对举乘．



上得 63 万，中得 48 万，下得 600 万，各为实．



次列元造弓 8 张，刀 5 副，箭 150 只于中行．又列见管弓作 225 人，刀作 540 人，箭作 276 人于左行．

左行	中行
见弓作 [illegible] ○人	元造弓 [illegible] 张
见刀作 [illegible] ○人	元造刀 [illegible] 副
见箭作 [illegible] 人	元造箭 [illegible] ○变

以两行对乘之，上得 1800，中得 2700，下得 41400，各为法。

上	1800
中	2700
下	41400 各为法

先以上法 1800，除寄右行弓日实 63 万日，得 350，为造弓 1 万张日数。

造弓 350 毕日	商 ○
○	实日 630000
○	法 1800

次以中法 2700，除寄右行刀日实 48 万日，得 177 日，为造刀 1 万副日数.

造刀毕 177 日	造刀 0
不尽 2100	刀日实 480000
2700 法	2700 法

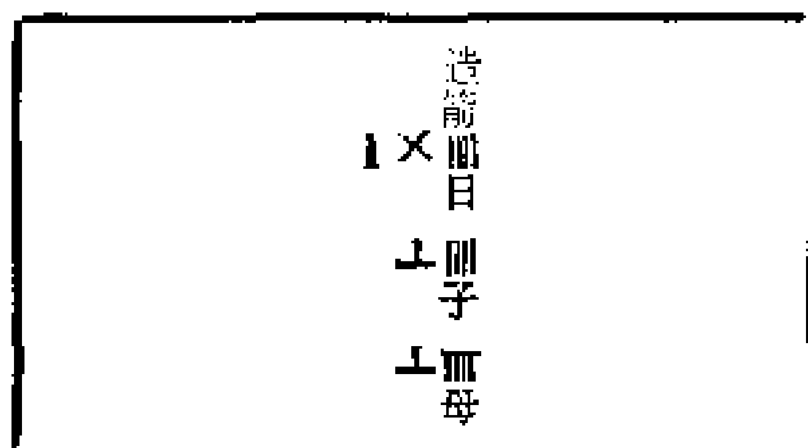
不尽 2100，与法求等，得 300，俱约之，为 9 分日之 7.

177 日
子 7
母 9

次以下法 41400，除寄右行箭日实 600 万日，得 144 日，为造箭 100 万只日数.

商 144 日	商 0
38400 日	箭日实 6000000
41400 法	41400 法

不尽 38400 日，与法 41400，求等，得 600，俱以约之，得 69 分日之 64，为造箭日分. 合问.



【新释】　已知：$a_1=10000$ 张，$a_2=10000$ 把，$a_3=1000000$ 只；$k_1=7$ 人，$k_2=8$ 人；$k_3=3$ 人，$m_1=9$ 日，$m_2=6$ 日，$m_3=2$ 日；$n_1=8$ 张，$n_2=5$ 把，$n_3=150$ 只；$b_1=225$ 人，$b_2=540$ 人，$b_3=276$ 人．代入(α)式，得各军器完工日数：

造弓：$d_1=\frac{10000\times7\times9}{225\times8}=\frac{630000}{1800}=350$ 日，

造刀：$d_2=\frac{10000\times8\times6}{540\times5}=\frac{480000}{2700}=177\frac{7}{9}$ 日．

造箭：$d_3=\frac{1000000\times3\times2}{276\times150}=\frac{6000000}{41400}=144\frac{64}{69}$ 日．

72．计 造 军 衣

问库有布绵絮三色，计料欲制军衣．其布，六人八匹，少一百六十匹，七人九匹，剩五百六十匹．其绵，八人一百五十两，剩一万六千五百两，九人一百七十两，剩一万四千四百两．其絮，四人一十三斤，少六千八百四斤，五人一十四斤，适足．欲知军士及布绵絮各几何？

答曰：兵士，一万五千一百二十人．

布，二万匹，

绵，三十万两，

絮，四万二千三百三十六斤．

术曰：以盈朒求之．置人数于左右之中，置所给物，各于其上，置盈朒数，各于其下，令维乘之．先以人数互乘其所给率，相减，余

为法. 次以人数相乘, 为寄. 后以盈朓互乘其上未减者, 是为维乘. 验其下系一盈一朓, 以上下皆并之, 其上并之, 为物实. 其下并之, 乘寄, 为兵实, 二实皆如法而一, 各得. 验其系两盈或两朓者, 以上下皆相减之, 其上减之余, 为物实. 其下减之余, 乘寄, 为兵实. 二实皆如法而一, 各得. 验其或一盈一足或一朓一足者, 其适足乃以空, 互乘其上未减者, 去之, 只以所用盈朓数, 互乘其上, 为物实. 以盈或朓一数乘寄, 为兵实. 皆如法而一, 各得.

【新释】 设库有布, a_1 人 b_1 匹, 少 k_1 匹; a_2 人 b_2 匹, 剩 k_2 匹. 则军士人数:

$$N=\frac{k_1+k_2}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}=\frac{a_1a_2(k_1+k_2)}{a_2b_1-a_1b_2} \tag{α}$$

而布匹:

$$R=\frac{b_1}{a_1}N-k_1=\frac{b_1a_2(k_1+k_2)}{a_2b_1-a_1b_2}-k_1$$

$$=\frac{a_1b_2k_1+a_2b_1k_2}{a_2b_1-a_1b_2} \tag{β}$$

次设库有绵, a_1' 人 b_1' 两, 剩 k_1' 两, a_2' 人 b_2' 两, 剩 k_2' 两, 则军士人数:

$$N'=\frac{k_1'-k_2'}{\frac{b_1'}{a_1'}-\frac{b_2'}{a_2'}}=\frac{a_1'a_2'(k_1'-k_2')}{a_2'b_1'-a_1'b_2'} \tag{α'}$$

而绵两:

$$R'=\frac{b_1'}{a_1'}N'+k_1'=\frac{a_2'b_1'(k_1'-k_2')}{a_2'b_1'-a_1'b_2'}+k_1'$$

$$=\frac{a_1'b_2'k_1'-a_2'b_1'k_2'}{a_2'b_1'-a_1'b_2'} \tag{β'}$$

又设库有絮, a_1'' 人 b_1'' 斤, 少 k_1'' 斤; a_2'' 人 b_2'' 斤, 适足. 则军士人数:

$$N''=\frac{k_1''}{\frac{b_1''}{a_1''}-\frac{b_2''}{a_2''}}=\frac{a_1'a_2''b_1''}{a_2''b_1''-a_1'b_2''}\qquad(\alpha'')$$

而絜斤：

$$R''=\frac{b_2''}{a_2''}N''=\frac{a_1''b_2''k_1''}{a_2''b_1''-a_1''b_2''}\qquad(\beta'')$$

在本问中，是把上述三种情形结合在一起的．所以必须当

$$N=N'=N''$$

成立时，才能有解．

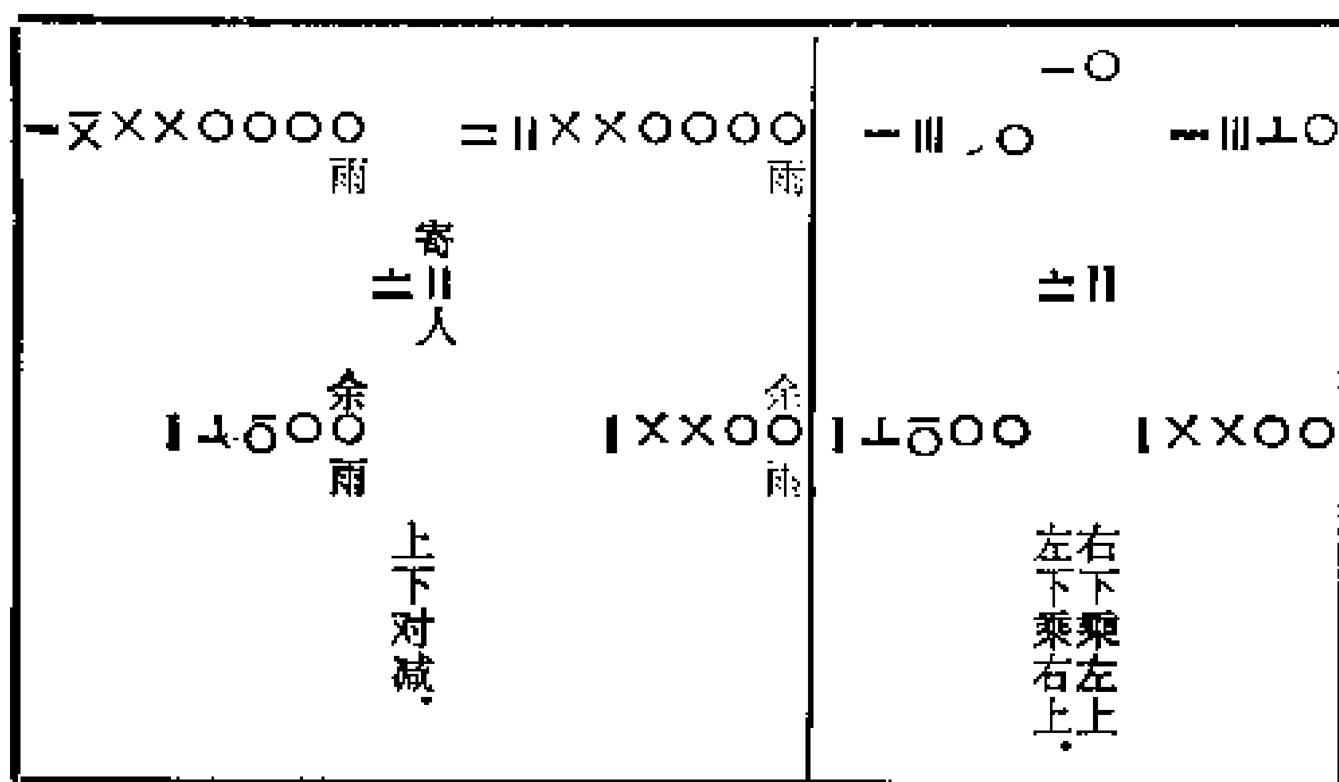
【原草】　求布草曰：置布 6 人于左中，8 匹于左上，朒 160 匹于左下．置 7 人于右中，9 匹于右上，盈 560 于右下．先以左右之中六七，互乘左右之上讫．左上得 56，右上得 54，以相减之．余 2，为法．次以左右中六七相乘，得 42，为寄于中．次以左下亏 160，乘右上未减 54，得 8640，又以右下盈 560，乘左上未减 56，得 31360，验得左右之下，系一盈一朒，当并之，以左上 31360，并右上 8640，得 4 万，为布实．次以左下朒 160，并右下盈 560，得 720，乘寄 42，得 30240，为兵实．二实皆如法 2 而一，得 2 万匹，为布．得 15120，为兵．

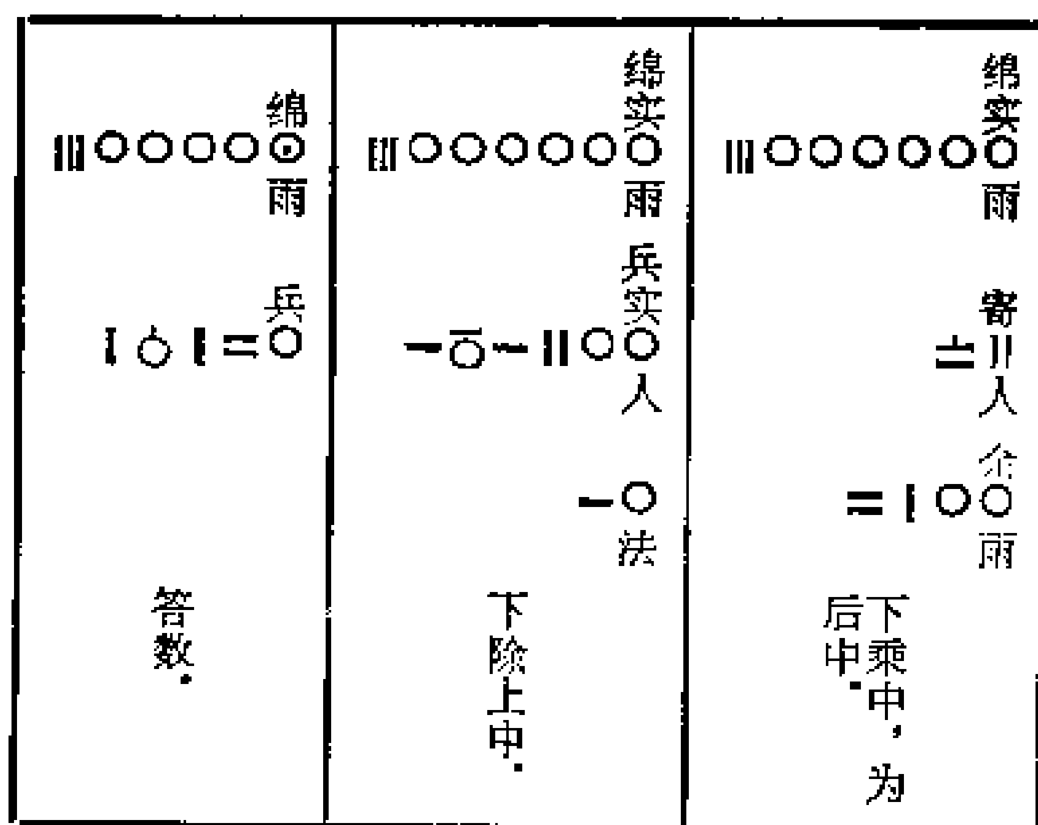
求布圖		右中乘左上，左中乘右上	上对减之，中双乘之	右下乘左上，左下乘右上
右行	左行			
布 9 匹	布 8 匹		54　56	31360　2　8640
7 人	6 人		7　6	42
盈 560 匹	朒 160 匹		盈 560　朒 160	560　160

两行并之。	布实 后中乘下，得中。 奇人	布实 兵实 法 中下除上及	布 四 兵 人 答数。
[算筹]	[算筹]	[算筹]	[算筹]

求绵草曰：置 8 人于左中，绵 150 两于左上，余 16500 两于左下．次置 9 人于右中，170 两于右上，余 14400 两于右下．以左右中八九，互乘各上讫，左上得 1350，右上得 1360，相减，余 10 为法。次以中八九相乘，得 72，为寄于中．次以左下 16500，乘右上 1360，得 2244 万．欲以右下 14400，乘左上 1350，得 1944 万．验其下系两盈，当相减之，其右上余 300 万，为绵实．其左右之下亦相减之，余 2100，乘寄 72，得 151200，为兵实．二实皆如法 10 而一，绵得 30 万两，兵得 15120 人。

求绵图 绵两 人 余绵两 右上左乘右行中，左上右乘左行中。	上对减，中对乘。
[算筹]	[算筹]





求絮草曰：置4人于左中，13斤于左上，少6804斤于左下．又置5人于右中，14斤于右上，适足为空于右下．以左右之中四五，互乘其上讫，左上得65，右上得56，相减，余9为法．以中四五相乘，得20，为寄于中．先以左下6804，互乘右上56，得381024，欲以右下适足之空，乘左上65，亦为空，乃去之，只以右上381024斤，为絮实．只以左下6804，乘寄20人，得136080，为兵实．二实皆如法9而一，其絮得42336斤，其兵得15120人．合问．

右行	左行		上 中 下		法
求絮图					
絮 [算筹]斤	絮 [算筹]	[算筹]	上 [算筹]	未减 [算筹]斤	未减 [算筹]斤
[算筹]人	[算筹]人	[算筹]人	中 [算筹]人		寄 [算筹]人
适足〇空	少[算筹]斤	〇空	下 [算筹] 少斤	足〇空	少[算筹]斤
右行	左行				[算筹]法
右中乘左上 左中乘右上			上对减，中对乘		左下乘右上，右上为下实；右下乘左上，为后空无乃去之

絮实[算筹]斤	絮实[算筹]斤	絮[算筹]斤
寄[算筹]人	兵实[算筹]人	兵[算筹]人
少[算筹]斤	[算筹]法	
以下乘中为后中	以下除上中	答数

已上布绵絮三项，求人兵数皆同．今仍于各图立算求之，以合本术．

【新释】 已知：$a_1=6$ 人，$b_1=8$ 匹，$k_1=160$ 匹；$a_2=7$ 人，$b_2=9$ 匹，$k_2=560$ 匹．由(α)式，得军士人数：

$$N=\frac{6\times7\times(160+560)}{7\times8-6\times9}=\frac{30240}{2}=15120\text{ 人}.$$

由(β)式，得布匹：

$$R=\frac{7\times8\times560+6\times9\times160}{2}=\frac{31860+8640}{2}$$

$$=20000\text{ 匹}.$$

又知：$a_1'=8$ 人，$b_1'=150$ 两，$k_1'=16500$ 两；$a_2'=9$ 人，$b_2'=170$ 两，$k_2'=14400$ 两；由(α')式，得军士人数：

$$N'=\frac{8\times9\times(16500-14400)}{8\times170-9\times150}=\frac{8\times9\times2100}{1360-1350}$$

$$=\frac{151200}{10}=15120\text{ 人}.$$

由(β')式，得绵两：

$$R'=\frac{8\times170\times16500-9\times150\times14400}{10}$$

$$=\frac{22440000-19440000}{10}=300000\text{ 两}.$$

复知：$a_1''=4$ 人，$b_1''=13$ 斤，$k_1''=6804$ 斤；$a_2''=5$ 人，$b_2''=14$ 斤。由(α'')式，得军士人数：

$$N''=\frac{4\times5\times6804}{5\times13-4\times14}=\frac{136080}{9}=15120\text{ 人}.$$

由(β'')式，得絮斤：

$$R''=\frac{4\times14\times6804}{9}=\frac{381024}{9}=42336\text{ 斤}.$$

今验 $N=N'=N''$，故由(α)，(β)，(β')，(β'')各式所给的结果，便是本问的答案。

第九章　市　物　类

在"推求物价"和"均货推本"二问中，秦氏给出了线性方程组的互乘消元法，它是从《九章算术》方程章的直除解法，加以改进而成功的一个方法，但与直除解法略有不同．设给予一个 n 个自变量 n 个方程式的线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

直除解法是这样的：先用 a_{11} 乘第二式，得

$$a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2+\cdots+a_{11}a_{2n}x_n=a_{11}b_2 \tag{α}$$

用(α)式的相当项累减组(1)中第一式的相当项 a_{21} 次后，便可给出

$$a_{21}a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2 \tag{β}$$

仿此用 a_{11} 遍乘其它各式，累减之，可得($n-1$)个(不含自变量 x_1)自变量($n-1$)个方程式的方程组：

$$\left.\begin{array}{l} a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a'_{n2}x_2+\cdots+a'_{nn}x_n=b'_n \end{array}\right\} \tag{2}$$

继续应用这个方法，最后可以变成仅含一个自变量 x_n 的一个方程式，于是得到

$$x_n=k_n.$$

把 x_n 的值代入上面的方程组，便可给出

$$x_1=k_1,\ x_2=k_2,\ \cdots,\ x_n=k_n \tag{3}$$

互乘消元法，则是将累减的过程，应用一个乘法，以简化直除解法的运算．例如在方程组(1)中，我们用 a_{11} 乘第二式，用 a_{21} 乘第一式，得第一第二两个变式，第二变式减第一变式后，复将第一变式化为原第一式．继续应用这个方法，可以给出完全相同的方程组(2)．和直除解法一样，最后我们可以得到仅含有一个自变量 x_n 的一个方程式而给出 $x_n=k_n$．从而获得全部解答(3)．

如果我们应用现代的矩阵符号，来表达它们的运算过程，便可以轻松愉快而且很迅速地给出所求的答案，这是值得推广的一种运算技巧．

现在我们根据秦氏的简化精神，可以把这个方法扩充到线性方程组的一般解法．设给予一个线性方程组：

$$\left.\begin{array}{c}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{array}\right\}\qquad(4)$$

式中的 s 和 n，一般说来，是彼此无关的．它们的系数和常数项，可以写成矩阵：

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s\end{array}\right).$$

对于这样的矩阵，我们约定，可以施行下面的初等变换：

(i) 左边 n 列，互易两列的位置，

(ii) 互易两行的位置，

(iii) 乘任一行以不为零的数，

(iv) 某一行加(或减)以其它行和某一数的乘积．

显然，这些变换，都是等价的．

定理一．矩阵 A 的左边 r 列，可经初等变换，使得除开 a_{11}，

a_{22}, $\cdots$, a_{rr}[其中 $1\leqslant r\leqslant \min(s, n)$]等于单位外，所有其它元素都等于零. 如果 $r<s$ 时，并且下面 $s-r$ 行的左边 n 列的元素全部为零. 这种情形，我们就说把所给的矩阵化为对角形的形状.

事实上，我们可以假定矩阵 A 的左边 n 列，至少有一个元素不为零(因为全部是零的情形，是不会有的.)，那么互易行列后可使元素 a_{11} 不为零，次乘第一行以 a_{11}^{-1}(如果只有一个元素不为零，这时就已经成为对角形.)，再从第 j 行($1<j\leqslant s$)起，减去第一行和 a_{j1} 的乘积，我们可以得到

$$A'=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{s2} & \cdots & a'_{sn} & b'_s \end{array}\right).$$

我们对于矩阵 A' 的下面 $s-1$ 行施行类似的变换，可以得到

$$A''=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a''_{s3} & \cdots & a''_{sn} & b''_s \end{array}\right).$$

继续仿此作去，经过 r 次变换之后，我们得到

$$A^{(r)}=\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a''_{2r} & a''_{1,2+r} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a^{(r)}_{r,r+1} & \cdots & a^{(r)}_{rn} & b^{(r)}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(r)}_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(r)}_s \end{array}\right)$$

我们复于矩阵 $A^{(r)}$ 的第 $r-1$ 行减去第 r 行的 $a^{(r-1)}_{r-1,r}$ 倍，得

$$A_1=\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a''_{2r} & a''_{2,r+1} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a^*_{r-1,r+1} & \cdots & a^*_{r-1,n} & b^*_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a^{(r)}_{r,r+1} & \cdots & a^{(s)}_{rn} & b^{(r)}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(r)}_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(s)}_s \end{array}\right)$$

我们更于矩阵 A_1 的第 $r-2$ 行，减去第 r 行的 $a^{(r-2)}_{r-2,r}$ 倍，再减去第 $r-1$ 行的 $a^{(r-2)}_{r-2,r-1}$ 倍，继续仿此作去，最后我们便可以得到对角形矩阵：

$$A^*=\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a^*_{1,r+1} & \cdots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a^*_{2,r+1} & \cdots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a^{(r)}_{r,r+1} & \cdots & a^{(r)}_{rn} & b^{(r)}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(r)}_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(r)}_s \end{array}\right).$$

这就证明了我们的定理。

定理二. 在对角形矩阵 A^* 中，如果 $r=s$，即

$$A^*=\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a^*_{1,r+1} & \cdots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a^*_{2,r+1} & \cdots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a^{(r)}_{r,r+1} & \cdots & a^{(r)}_{rn} & b^{(r)}_s \end{array}\right)$$

时，则方程组(4)是相容的，并且当 $r=n$ 时，有唯一解：

$$x_1=b^*_1,\ x_2=b^*_2,\ \cdots,\ x_r=b^{(r)}_r \tag{5}$$

否则便有无限多的解.

实际上，从初等变换的过程里，很容易知道定理的正确性，因

为这时的 r 个方程式，可以写成：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=b_1^*-a_{1,r+1}^*x_{r+1}-a_{1,r+2}^*x_{r+2}-\cdots-a_{1n}^*x_n,\\x_2&=b_2^*-a_{2,r+1}^*x_{r+1}-a_{2,r+2}^*x_{r+2}-\cdots-a_{2n}^*x_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_r&=b_r^{(r)}-a_{r,r+1}^{(r)}x_{r+1}-a_{r,r+2}^{(r)}x_{r+2}-\cdots-a_{rn}^{(r)}x_n\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

的形状．这时任给 $x_i(r<i\leqslant n)$一组数值，都可确定方程组(6)亦即方程组(4)的一组解答，所以说这时的方程组(4)是相容的．显然当 $r=n$ 时，有唯一解(5)．当 $r<n$ 时，有无限多的解(6)．

定理三．在对角形矩阵 A^* 中，如果 $r<s$，则当下面 $s-r$ 行的常数项 $b_{r+1}^{(r)}$，$b_{r+2}^{(r)}$，…，$b_s^{(r)}$ 等全部为零时，方程组(4)才是相容的，否则便是不相容的．

证明：由对角形矩阵 A^* 所确定的 s 个方程式和由矩阵 A 所确定的方程组(4)是等价的，如果 $b_i^{(r)}(r<i\leqslant s)$全部为零，那么下面的 $s-r$ 个方程式，就有

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=0\qquad(7)$$

的形状．显然所有能够满足上面 r 个方程式的数值，也能够满足(7)式，所以我们只研究上面的 r 个方程式就够了．由定理二可知这时的方程组(4)是相容的．

反之，如果任有一个 $b_j^{(r)}(r<j\leqslant s)$不为零，便有

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=b_j^{(r)}\qquad(8)$$

存在．显然任何一组数值，都不能满足(8)式，因此，这时的方程组(4)是不相容的．

综合上述，因得一般线性方程组在实用中的解法如次：把线性方程组(4)的未知量的系数和常数项列成矩阵 A 的形状，按照约定，对于矩阵 A 施行上述的初等变换，使之化为对角形矩阵 A^*的形状．在运算的过程里，如果发现某一行中所有未知量的系数即左边 n 个元素全化为零而常数项不为零时，则方程组(4)是不相容的．如果发现某一行中所有的$(n+1)$个元素全部化为零时，即可

将该行弃去，继续运算其它各行，最后必可化为

$$A^*=\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a^*_{1,r+1} & \cdots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a^*_{2,r+1} & \cdots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a^{(r)}_{r,r+1} & \cdots & a^{(r)}_{rn} & b^{(r)}_r \end{array}\right)$$

的形状．这时若 $r=n$，则方程组(4)有唯一解(5)，若 $r<n$，则方程组(4)有无限多的解(6)．

例 1．解下面的线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+x_3=-1 \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

解：把方程组(α)的系数和常数项列成矩阵：

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

第二行减第一行，第三行减第一行的 2 倍，得

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right).$$

第三行加第二行的 5 倍，得

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right).$$

第三行以 -11 约之，得

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

第二行加第三行的 2 倍，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 3 \end{pmatrix}.$$

第一行减第二行，再减第三行，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 3 \end{pmatrix}$$

因得：$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$.

在实际运算中，和行列式的简化，很有一些相像，不过这里只限于行与行间吧了．我们为了进一步简化运算手续，可以用箭号表示它们的运算过程而略去文字的叙述.

例 2．解次之线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7, \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1, \\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0 \end{array}\right\} \qquad (\beta)$$

解：

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & \vert & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & \vert & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{②行}-2\times\text{③行}]{\text{①行}-5\times\text{③行}} \begin{pmatrix} 0 & 14 & 32 & -24 & \vert & 7 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & \vert & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行①}-2\times\text{③行}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vert & 5 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & \vert & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & \vert & 0 \end{pmatrix}.$$

这时第一行未知量的系数全化为零而常数项不为零，因知方程组(β)是不相容的.

例 3．解线性方程组：

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2-2x_3-x_4+x_3=1,\\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4,\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0\end{aligned}\right\}\qquad(\gamma)$$

解:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&-1&1&1\\3&-1&1&4&3&4\\1&5&-9&-8&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③-①]{②-3\times①}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&-1&1&1\\0&-4&7&7&0&1\\0&4&-7&7&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②+③}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&-1&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&4&-7&-7&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&1&1&1\\0&4&-7&-7&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\div 4}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&-1&1&1\\0&1&-7/4&-7/4&0&-1/4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①-②}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1/4&3/4&1&5/4\\0&1&-7/4&-7/4&0&-1/4\end{array}\right).$$

因得: $\begin{cases}x_1=5/4+1/4\cdot x_3-3/4\cdot x_4-x_5,\\ x_2=-1/4+7/4\cdot x_3+7/4\cdot x_4.\end{cases}$

"推计互易"一问，是连锁比例和配分比例的混合命题，秦氏给出了一个很巧妙地运算方法，不仅便于记忆，而且计算简捷，也是值得我们学习的．馆案语:"术中互乘进乘退乘对乘，皆通分法也张丘建云：学者不患乘除之为难，而患通分之为难，此术曲尽其妙…．再此术不独用法之巧，即图式布置，亦皆具精义，熟玩之，可以得其往来变通之故．…．"这个评价是很恰当的．

当以左行直减右行毕，仍置定图左行数．

沈 沈 沈
瑇 瑇 瑇
乳 乳 乳

右积得 3969000 贯，沈得 9540，瑇得 6150．次验中左两行，各有下位段．又以左下 75，互乘中行，乃以中行下 815，互乘左行毕．中积得 2940 万贯，沈得 59400，瑇得 42600，乳得 61125．左积得 23961000 贯，沈得 52160，瑇得 24450，乳得 61125．验左积少，中积多，以左行同名直减中行毕，仍置定图左行数．

左　中　右
干图
宫图

中积得 5439000 贯，沈得 7240，瑇得 18150．今验右中两行数多又求等约之，其右行求得 30，约之，右积得 132300 贯，沈得 318，瑇得 205 斤．中行求得 10，约之，中积得 543900 贯，沈得 724，瑇得 1815．今又欲去中右行瑇之䐶，乃以中行 1815，互乘右行，右积得 240124500 贯，右沈得 577170，右瑇得 372075．次以干图右瑇 205，互乘中行，中积得 111499500 贯，中沈得 148420，中瑇得 372075．今验宫图右积多，中积少，乃以中行直减右行毕，仍置干图中行数．

左　中　右

干图

支图

今验干图右行段数，只有沈香428750裹，以为法．从右上积128625000贯，为实．实如法而一，得300贯，为沈香一裹价．便以中行沈724，乘300贯，得217200贯，减中积543900贯，余326700贯，为中积．便减去中行沈香段之数．次以左上沈64，乘300贯，得19200贯，减去积29400贯，余10200贯，为左积．便减左上沈香裹数去之．今验支图中行，其下只有瑇瑁1815，以为法以中积326700贯，为实．实如法而一，得180贯，为瑇瑁价．

闰图

$$\xrightarrow[③\times 815]{②\times 75}\left(\begin{array}{ccc|c} 9540 & 6150 & 0 & 3969000 \\ 59400 & 42600 & 61125 & 29400000 \\ 52160 & 24450 & 61125 & 23961000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③\div 815]{②-③}\left(\begin{array}{ccc|c} 9540 & 6150 & 0 & 3969000 \\ 7240 & 18150 & 0 & 5439000 \\ 64 & 30 & 75 & 29400 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②\div 10]{①\div 30}\left(\begin{array}{ccc|c} 318 & 205 & 0 & 132300 \\ 724 & 1815 & 0 & 543900 \\ 64 & 30 & 75 & 29400 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②\times 205]{①\times 1815}\left(\begin{array}{ccc|c} 577170 & 372075 & 0 & 240124500 \\ 148420 & 372075 & 0 & 111499500 \\ 64 & 30 & 75 & 29400 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②\div 205]{①-②}\left(\begin{array}{ccc|c} 428750 & 0 & 0 & 12862500 \\ 724 & 1815 & 0 & 543900 \\ 64 & 30 & 75 & 29400 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\div 428750}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 724 & 1815 & 0 & 543900 \\ 64 & 30 & 75 & 29400 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③-①\times 64]{②-①\times 724}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1815 & 0 & 326700 \\ 0 & 30 & 75 & 10200 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\div 1815}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 180 \\ 0 & 30 & 75 & 10200 \end{array}\right)$$

第十七卷 凡 四 问

73. 推求物价

问榷(原"榷"误为"推")货务三次，支物准钱各一百四十七万贯文。先拨沈香三千五百裹，瑇瑁二千二百斤，乳香三百七十五套。次拨沈香二千九百七十裹，瑇瑁二千一百三十斤，乳香三千五十六套四分套之一。后拨沈香三千二百裹，瑇瑁一千五百斤，乳香三千七百五十套。欲求沈乳瑇瑁裹斤套各价几何？

答曰：沈香，每裹三百贯文，

乳香，每套六十四贯文，

瑇瑁，每斤一百八十贯文。

术曰：以方程求之，正负入之。列积及物数于下，布行数，各对本色，有分者通之，可约者约之，为定率积。列数每以下项互遍乘之，每视其积以少减多，其下物数，各随积正负之类。如同名相减，异名相加，正无人负之，负无人正之。其如同名相加，异名相减，正无人正之，负无人负之。使其下项物数得一数者为法，其积为实，实如法而一，所得不计遍损或益诸积，各得法实，除之。余仿此。

【新释】 设 x_1 为沈香每裹价格，x_2 为瑇瑁每斤价格，x_3 为乳香每套价格；复设先拨沈香 a_{11} 裹，瑇瑁 a_{12} 斤，乳香 a_{13} 套；次拨沈香 a_{21} 裹，瑇瑁 a_{22} 斤，乳香 a_{23} 套；后拨沈香 a_{31} 裹，瑇瑁 a_{32} 斤，乳香 a_{33} 套。又设每次各支物准钱为 b_1，b_2，b_3。依据题意，则可列成如下的线性方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

解之，即可给出各物单价。

【原草】 草曰：置准钱 147 万贯，为三次拨钱，为三行积数 次

置先拨沈香 3500 裹，瑇瑁 2200 斤，乳香 375 套，为右行物数. 又列次拨沈香 2970 裹，瑇瑁 2130 斤，乳香 3056 套 4 分套之 1，为中行物. 次列沈香 3200 裹，瑇瑁 1500 斤，乳香 3750 套，为左行之物. 各以本色相对列之.

一𝍬〇〇〇〇 十 贯 沈𝍢𝍪〇〇 瑇𝍠𝍭〇〇 乳𝍫𝍯𝍣〇	一𝍬𝍦〇〇〇 十 贯 沈𝍡𝍱𝍥〇 瑇𝍠𝍡𝍢〇 乳𝍦〇𝍤𝍮 子𝍩 母𝍬	一𝍬𝍦〇〇〇 十 贯 沈𝍢𝍭〇〇 瑇𝍡𝍪〇〇 乳𝍫𝍥𝍭
一𝍬𝍥〇〇〇 十 贯 𝍡沈𝍢𝍪〇〇 瑇𝍠𝍭〇〇 乳𝍢𝍯𝍣〇 一𝍬𝍢〇 十 贯 沈𝍥𝍫 瑇𝍢〇 乳𝍥𝍬	𝍣𝍯𝍦〇〇〇 十 贯 沈𝍩𝍠𝍯𝍦〇 𝍦𝍦〇𝍡〇 乳𝍩𝍡𝍪𝍡𝍭 𝍫𝍧𝍪〇〇 十 贯 沈𝍯𝍦𝍪 瑇〇𝍥𝍰 乳𝍰𝍠〇	一𝍬𝍦〇〇〇 十 贯 沈𝍢𝍭〇〇 瑇𝍡𝍪〇〇 乳𝍫𝍥𝍭〇 〇𝍰𝍦〇 十 贯 沈𝍩㐅〇 瑇　𝍦𝍰 乳　𝍩〇

其中行乳香，有 4 分套之 1，便以母 4，通中行诸数，只内子 1，入乳香段内，积得 588 万贯，沈得 11880 裹，瑇得 8520 斤，乳得 12225 套. 以右行求等，得 25，俱约之，积得 58800 贯，沈得 140 裹，瑇得 88 斤，乳得 15 套. 以中行求等，得 15，约之，积得 392000 贯，沈得 792 裹，瑇得 568 斤，乳得 815 套. 以左行求等，得 50，约之，积得 29400 贯，沈得 64 裹，瑇得 30 斤，乳得 75 套. 列为定率图三行. 副置求之，今先欲去定图下位，乳香套数 15，与左下 75，互乘左右两行，右积得 441 万贯，沈得 10500，瑇得 6600，乳得 1125. 左积得 441000 贯，沈得 960，瑇得 450，乳得 1125. 验左积少，右积多，

$$\xrightarrow{③-②\times 30}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&300\\0&1&0&180\\0&0&75&4800\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\div 75}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&300\\0&1&0&180\\0&0&1&64\end{array}\right).$$

因得：$x_1=300$ 贯文，$x_2=180$ 贯文，$x_3=64$ 贯文。

74. 均货推本

问有海舶赴务抽毕，除纳主家货物外，有沈香五千八十八两，胡椒一万四百三十包，包四十斤象牙二百一十二合，大小为合，斤两俱等系甲乙丙丁四人合本博到．缘昨来凑本，互有假借，甲分到官供称：甲本金二百两，盐四袋钞一十道．乙本银八百两，盐三袋钞八十八道．丙本银一千六百七十两，度牒一十五道．丁本度牒五十二道，金五十八两八铢．已上共估直四十二万四千贯．甲借乙钞，乙借丙银，丙借丁度牒，丁借甲金．今合拨各借物归元主名下，为率均分上件货物．欲知金银袋盐度牒元价，及四人各合得香椒牙几何？

答曰：甲金，每两四百八十贯文．

本，一十二万四千贯文．

合得沈香，一千四百八十八两，

胡椒，三千五十包一十一斤五两，五十三分两之七．

象牙，六十二合．

乙盐，每袋二百五十贯文．

本，七万六千贯文.

合得沈香，九百一十二两，

胡椒，一千八百六十九包二十一斤二两，五十三分两之六。

象牙，三十八合.

丙银，每两五十贯文.

本，一十二万三千五百贯文.

合得沈香，一千四百八十二两，

胡椒，三千三十七包三十九斤五两，五十三分两之二十三，

象牙，六十一合四分合之三.

丁度牒，每道一千五百贯文.

本，一十万五百贯文.

合得沈香，一千二百六两，

胡椒，二千四百七十二包八斤三两，五十三分之两之十七。

象牙，五十合四分合之一.

术曰：以方程求之，衰分加之，正负入之．置共钱，以人数约之，得数，列如人数，各为行积．次置诸色各物数，为段子．对本色，有分者通之，可约者约之，为定率．以第一行为右，以第二行为副，第三行为次，第四行为左．每以下位互遍乘之，每验其积，以少减多．如同名相减，异名相加，正无人负之，负无人正之．如同名相加，异名相减，正无人正之，负无人负之．得一段为法，以除积为实，除之，各得诸价．以诸价列右行，以各物数列左行，以两行对乘，得各本率．从诸色求等，约之，得列衰，并诸衰，为总法．以列衰遍乘各物诸数，各为实．诸实并如总法而一，各得其物．除不尽者，以斤两通而除之，或又分母命之.

【新释】 设金两价 x_1 文，盐袋价 x_2 文，银两价 x_3 文，度牒道价 x_4 文；共本为 K，甲本金 a_{11} 两，盐 a_{12} 袋，乙本盐 a_{22} 袋，银 a_{23} 两，丙本银 a_{33} 两、度牒 a_{34} 道，丁本度牒 a_{44} 道，金 a_{41} 两．依据题意，可以列成下面的线性方程组：

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2 &= K/4,\\ a_{22}x_2+a_{23}x_3 &= K/4,\\ a_{33}x_3+a_{34}x_4 &= K/4,\\ a_{41}x_1+a_{44}x_4 &= K/4\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

解之，可得诸物单价.

因元素甲借乙钞，乙借丙银，丙借丁度牒，丁借甲金．今仍拨各借物归元主名下，则各人元本为

$$\left.\begin{aligned}\text{甲元本：}\ A_1 &= (a_{11}+a_{41})x_1,\\ \text{乙元本：}\ A_2 &= (a_{12}+a_{22})x_2,\\ \text{丙元本：}\ A_3 &= (a_{23}+a_{33})x_3,\\ \text{丁元本：}\ A_4 &= (a_{34}+a_{44})x_4\end{aligned}\right\}\quad(\beta)$$

次设余有沈香 B_1 两、胡椒 B_2 包，象牙 B_3 合，则各人应得

$$\left.\begin{aligned}\text{沈香：}\ C_i &= \frac{A_iB_1}{\sum A},\\ \text{胡椒：}\ D_i &= \frac{A_iB_2}{\sum A},\\ \text{象牙：}\ E_i &= \frac{A_iB_3}{\sum A}\end{aligned}\right\}\quad(\gamma)$$

【原草】 草曰：置估直 424000 贯，以 4 人约之，得 106000 贯，为各积．以人数列四位，次置甲金 200 两于右上，以 4 袋乘钞 10 道，得 40 袋于右副，为右行．次置乙钞 88 道，以 3 袋乘之，得盐 264 袋，及银 800 两，为副行．次置丙银 1670 两，度牒 15 道，为次行．次置丁度牒 52 道，金 58 两 8 铢，为左行．验得首图左行上段，金带 8 铢，是 3 分两之 1，乃以分母通乘左行诸数，只以分子 1 出入左上金内．其左积得 318000 贯，左金得 175 两，左度牒得 156 道，为次图．验次图四行，皆可求等，右行求得 40，约之，副行求得 8，约之，次行求得 5，约之，左行求得 1，约之，各得数，为定率图．

定率图右积，得2650贯，金5两，盐1袋．副积，得13250贯，盐33袋，银100两．次积，得21200贯，银334两，度牒3道．左积，得318000贯，金175两，度牒156道．乃以定图次行之度牒3，因左行，左积得954000贯，金525两，度牒468道．次以定图左下度牒156道，乘次行，积得3307200贯，银52104两．

定率图

	左行	次行	副行	右行
积	积||||一|||〇〇十贯	积=|=〇十贯	积一|||=〇十贯	积||⊥〇十贯
金/盐/银	金|≐〇〇〇	〇〇 银||||≡||||	〇 盐≡||| 银|〇〇	金|||| 盐|〇
度牒	度牒|〇┬	度牒|||	〇〇	〇

后图屡变，每取定率图之数用之

维图

	左行	次行	副行	右行
积	积×〇||||〇〇十贯	≡||〇π=〇十贯	一|||=〇十贯	=⊥〇十贯
金/盐/银	金〇=〇〇〇	〇〇 银〇=|〇×	〇 盐≡||| 银|〇〇	金|||| 盐|〇
度牒	度牒×⊥π	度牒×⊥π	〇	〇

乃验维图左及次行之下，度牒等，当相减之，以积为端，当以左之少积，来减次之多积．按术曰，同名相减，其次行之金空，而左行之金525两，有为正．次空，为无．按术曰：正无人负之，即以左行之金正，加入次行金位为负，乃成音图．仍置定图左行诸数．

乃验音图，次行积得2353200贯正，金525两负，银52104两正，余三行，皆正．

	右行	次行	次左行	左行
音图	积〇十贯；金正；盐正；〇；〇	积〇十贯；〇；盐正；银正；〇	图积〇十贯；金负；〇；银正；〇	积〇十贯；金正；〇；〇；度牒正
交图	积〇十贯；金正；盐正；〇；〇	积〇十贯；〇；盐正；银正；〇	图积〇十贯；金负；〇；银正；〇	积〇十贯；金正；〇；〇；度牒正

今验音次行之负金，当以右行之正金补之．而其数不等．先以右金5，约次金525，得105，以乘音图右行毕．其右积得278250贯，金525两正，盐105袋正．其副次左三行，如音图故，乃成交图．今视交图右行之金正，与次行之金负，适等，即用右行直加次行，按术以同名相加．乃以右之金正，减其次之金负，为空．按术以异名相减之，其次盐空为无人，按术以正无人正之，乃以交图右积278250贯，加次积2353200贯内，得2631450贯，其次金空，次盐105袋正，次银52104两正．仍置定图右行数，而成政(原“政”误为“正”)图．

今视政图，从省，乃择其诸行本色，可求等，首金可，盐亦可．盖金多盐少，乃以政图副次两行盐数 33，与 105 求等，得 3，故以 3 约 33，得 11，以乘次行，又以 3 约 105，得 35，以乘副行毕．其副积得 463750 贯，盐 1155 袋，银 3500 两．次积 28945950，盐 1155 袋，银 573144 两，皆正，列成卜图．

左行	次行	宫图 始以定图为祖 终用宫图求数	副行	右行
积 贯 金 度牒	贯 银		贯 盐 银	贯 金 盐

乃视卜图副行积少，次行积多，即以副行来减次行，皆是同名相减之，既毕．仍置定图副行数．其次行乃得积 28482200 贯，银得 569644 两，列为宫图．验宫图次行下，只有银 569644 两独一数，

以为法．以次积 28482200 贯为实．实如法而一，得 50 贯，为银 1 两价，而成干图．

干图

乃以干图副行银 100 两，乘两价 50 贯，得 5000 贯，以减干图副行之积 13250 贯讫．副积余 8250 贯，其下盐得 33 袋，银空，而成曜图．乃以曜图副行之积 8250 贯，为盐实，以其下盐 33 袋为法，除之，得 250 贯，为盐 1 袋价．而成支图．

曜图

支图

乃以支图右行盐 1 袋，遍乘副行毕．其副积只得 250 贯．次以副行直减右行毕，右积余 2400 贯，金 5 两，盐空，而成闰图．

乃以闰图右积 2400 贯，为实．金 5 两为法，除之，得 480 贯，为金 1 两价，成定图．次以闰图左金 175 两，遍乘右行，直减左行

讫．左积得234000贯，度牒156道，左金空，而成定图．

积Ⅲ一Ⅲ○○十贯 金Ⅰ⊥○○○ 度牒Ⅰ○T	价Ⅲ十贯○○ 银Ⅰ○	闰图	价=Ⅲ十贯○ 盐Ⅰ○○	实Ⅱ×○十贯 金Ⅲ○○○
实Ⅱ≡Ⅲ○○十贯○○○ 度牒Ⅰ○T	价Ⅲ十贯○○ 银Ⅰ○	定图	价ⅡⅢ十贯○ 盐Ⅰ○○	价×Ⅲ十贯 金Ⅰ○○○

今验定图，左积234000贯，为实．以左下度牒156道为法．除之，得1500贯，为度牒1道价，以成终图．既得金银每两，钞盐每袋，度牒每道各色之价．次列甲乙丙丁四人乘之．

左	次	终图	副	右
价 Ⅰ○○○○○○○文○○○ 度牒Ⅰ道	价 ○○○○○○文○○ 银Ⅰ两○		价 =○○○○○○文○ 盐Ⅰ袋○○	价 ×Ⅲ○○○○文 金Ⅰ两○○○

复以首图右金200两，并左金58两8铢，得258两．以8铢为3分两之1，通分内子，得775于左甲，其右价480贯．乃以左甲母3约之，为160贯于右甲．次以右盐40袋、并副盐264袋，得304袋于左乙、次以副银800两，并次银1670两，得2470两，为左丙．又以次行度牒15道，并左度牒52道，得67道，为左丁．以两行对乘之．

左行		右行
金 两	甲	金价 十贯
盐 袋	乙	盐价
银 两	丙	银价
牒 道	丁	度牒价

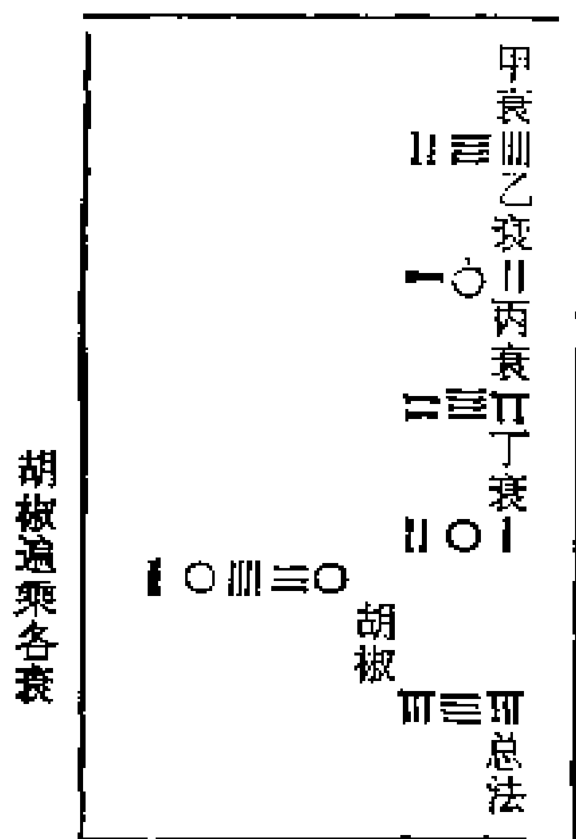
以右甲 160， 乘左甲 775 两，得1 24000 贯， 为甲元本. 以右乙 250 贯，乘左乙 304 袋，得 76000 贯，为乙元本. 以右丙 50 贯，乘左丙 2470 两，得 123500 贯，为丙元本. 以右丁 1500 贯，乘左丁 67 道，得 100500 贯，为丁元本. 列四人各得元本，求得等 500 贯，皆以 500 贯为法，除之，甲得 248，乙得 152，丙得 247，丁得 201，各为列衰于右行. 并右行列衰，得 848，为总法. 次置博到沈香 5088 两，遍乘列衰，各为沈香实. 次置胡椒 10430 包，亦遍乘列衰，为椒实. 次置象牙 424 条，以大小为合，半之，得 212 合. 亦遍乘列衰，为牙实.

甲衰 乙衰 丙衰 丁衰 总法

沈香

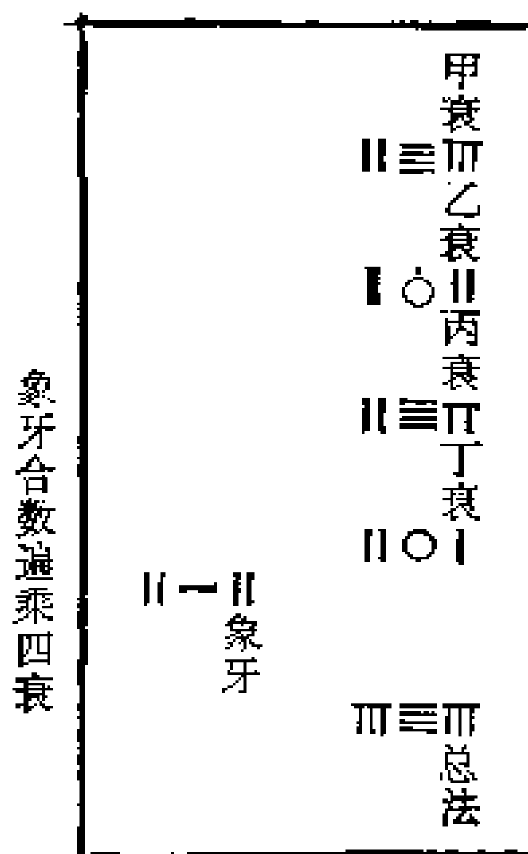
沈香偏乘四斤

甲得 1261824，乙得 773376，丙得 1256736，丁得 1022688，各为沈香实．以总法 848 除之，甲得沈香 1488 两，乙得沈香 912 两，丙得沈香 1482 两，丁得沈香 1206 两．



甲得 2586640，乙得 1585360，丙得 2576210，丁得 2096430，各为椒实．以总法 848 除之，甲得 3050 包，不尽 240 包，以包率 40 斤乘之，得 9600 斤，又以法除之，得 11 斤，不尽 272 斤，以 16 两通之，得 4352 两，又以法除之，得 5 两，不尽 112，求等，得 16，约之，得 53 分两之 7．为（原“为”误为“约”）甲得椒 3050 包 11 斤 5 两 53 分两之 7．乙得 1869 包，不尽 448 包，以 40 斤乘之，得 17920，又以法除之，得 21 斤，不尽 112 斤，以 16 两通之，得 1792 两，又以法除之，得 2 两，不尽 96 两，求等，得 16，约之，得 53 分两之 6，为乙合得椒 1869 包 21 斤 2 两 53 分两之 6．丙得 3037 包，不尽 834，以 40 斤通之，得 33360 斤，又以法除之，得 39 斤，不尽 288，以 16 两通之，得 4608 两，又以法除之，得 5 两，不尽 368 两，求等，得 16，约之，得 53 分两之 23．为丙合得椒 3037 包 39 斤 5 两 53 分两之 23．丁得 2472 包，不尽 174，以 40 斤通之，得 6960 斤，又以法除之，得 8 斤，不尽 176，以 16 两通之，得 2816，又以法除之，得 3 两，

不尽 272，求等，得 16，约之，得 53分两之 17，为丁合得椒 2472 包 8 斤 3 两 53 分两之 17.



甲得 52576 合，乙得 32224 合，丙得 52364 合，丁得 42612 合，各为牙实. 皆以总法 848 除之，甲合得牙 62 合，乙合得牙 38 合，丙合得牙 61 合，不尽 636. 求等，得 212，约之，得 4 分合之 3. 丁合得牙 50 合，不尽 212，求等，得 212，约之，得 4 分合之 1.

【新释】 已知：$K=424000000$ 文 $=424000$ 贯，$a_{11}=200$ 两，$a_{12}=4\times10=40$ 袋，$a_{22}=3\times88=264$ 袋，$a_{23}=800$ 两，$a_{33}=1670$ 两，$a_{34}=15$ 道，$a_{41}=58\frac{1}{3}$ 两，$a_{44}=52$ 道，代入(α)式，得线性方程组如次：

$$\left.\begin{aligned}200x_1+40x_2&=106000,\\264x_2+800x_3&=106000,\\1670x_3+15x_4&=106000,\\58\frac{1}{3}x_1\qquad\qquad+52x_4&=106000\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

式中常数项以贯为单位(原草以十贯为单位.)

兹用矩阵解之，则得

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 200 & 40 & 0 & 0 & 106000 \\ 0 & 264 & 800 & 0 & 106000 \\ 0 & 0 & 1670 & 15 & 106000 \\ 58\frac{1}{3} & 0 & 0 & 52 & 106000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{③行}\div 5,\ \text{④行}\times 3]{\text{①行}\div 40,\ \text{②行}\div 8}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 33 & 100 & 0 & 13250 \\ 0 & 0 & 334 & 3 & 21200 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{④}\times 3]{\text{③}\times 156}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 33 & 100 & 0 & 13250 \\ 0 & 0 & 52104 & 468 & 3307200 \\ 525 & 0 & 0 & 468 & 954000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{④}\div 3]{\text{③}-\text{④}}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 33 & 100 & 0 & 13250 \\ -525 & 0 & 52104 & 0 & 2353200 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{①}\times 105}\left(\begin{array}{cccc|c} 525 & 105 & 0 & 0 & 278250 \\ 0 & 33 & 100 & 0 & 13250 \\ -525 & 0 & 52104 & 0 & 2353200 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{①}\div 105]{\text{③}+\text{①}}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 33 & 100 & 0 & 13250 \\ 0 & 105 & 52104 & 0 & 2631450 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{③}\times 11]{\text{②}\times 35}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 1155 & 3500 & 0 & 463750 \\ 0 & 1155 & 573144 & 0 & 28945950 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{②}\div 35]{\text{③}-\text{②}}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 33 & 100 & 0 & 13250 \\ 0 & 0 & 569644 & 0 & 28482200 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{③}\div 569644}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 33 & 100 & 0 & 13250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{②}-\text{③}\times 100}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 33 & 0 & 0 & 8250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{②}\div 33}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 & 2650 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{①}-\text{②}}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 & 2400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 175 & 0 & 0 & 156 & 318000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{④}-\text{①}\times 175]{\text{①}\div 5\text{后}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 480 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 156 & 234000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{④\div 156}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 480 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1500 \end{array}\right).$$

因得：$x_1=480$ 贯文，$x_2=250$ 贯文，$x_3=50$ 贯文，$x_4=1500$ 贯文.

由(β)式，得各人元本：

$$A_1=\left(200+58\frac{1}{3}\right)\times 480=\frac{775\times 480}{3}=124000 \text{ 贯文},$$

$$A_2=(40+264)\times 250=304\times 250=76000 \text{ 贯文},$$

$$A_3=(800+1670)\times 50=2470\times 50=123500 \text{ 贯文},$$

$$A_4=(15+52)\times 1500=67\times 1500=100500 \text{ 贯文}.$$

次知：$B_1=5088$ 两，$B_2=10430$ 包(每包 40 斤)，$B_3=212$ 合，由(γ)式，得甲应得

$$\text{沈香：}C_1=\frac{124000\times 5088}{124000+76000+123500+100500}$$

$$=\frac{248\times 5088}{248+152+247+201}=\frac{248\times 5088}{848}$$

$$=\frac{1261824}{848}=1488 \text{ 两},$$

$$\text{胡椒：}D_1=\frac{248\times 10430}{848}=\frac{2586640}{848}=3050\frac{240}{848} \text{ 包}$$

$$=3050 \text{ 包 } \frac{240\times 40}{848} \text{ 斤}=3050 \text{ 包 } 11 \text{ 斤 } 5\frac{1}{53} \text{ 两},$$

$$\text{象牙：}E_1=\frac{248\times 212}{848}=\frac{52576}{848}=62 \text{ 合}.$$

乙应得

$$\text{沈香：}C_2=\frac{152\times 5088}{848}=\frac{773376}{848}=912 \text{ 两},$$

$$\text{胡椒：}D_2=\frac{152\times 10430}{848}=\frac{1585360}{848}$$

$$=1869\text{包}21\text{斤}2\frac{6}{53}\text{两},$$

象牙：$E_2=\frac{152\times212}{848}=\frac{32224}{843}=38$ 合．

丙应得

沈香：$C_3=\frac{247\times5088}{848}=\frac{1256736}{848}=1482$ 两，

胡椒：$D_3=\frac{247\times10430}{848}=\frac{2576210}{848}$

$$=3037\text{包}39\text{斤}5\frac{28}{53}\text{两},$$

象牙：$E_3=\frac{247\times212}{848}=\frac{52364}{848}=61\frac{3}{4}$ 合。

丁应得

沈香：$C_4=\frac{201\times5088}{848}=\frac{1022688}{848}=1206$ 两。

胡椒：$D_4=\frac{201\times10430}{848}=\frac{2096430}{848}$

$$=2472\text{包}8\text{斤}3\frac{17}{53}\text{两},$$

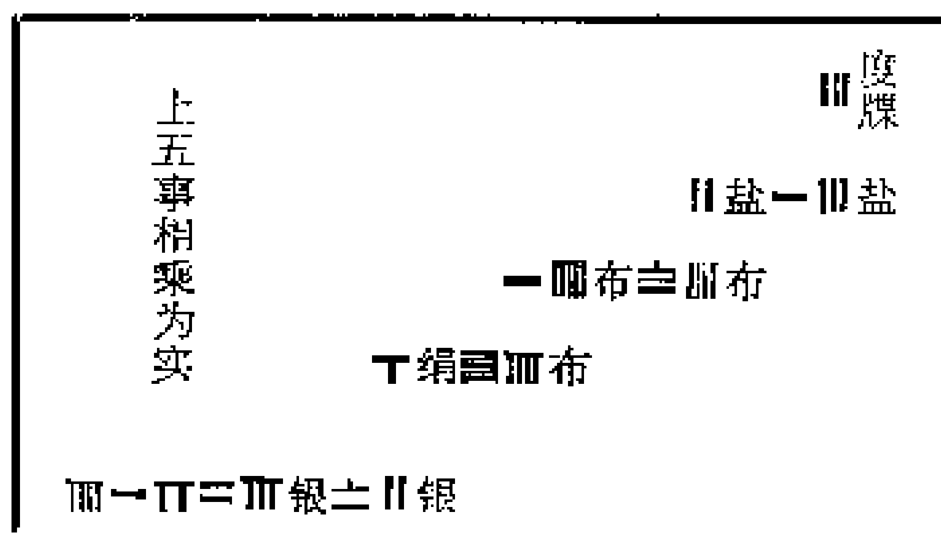
象牙：$E_4=\frac{201\times212}{848}=\frac{42612}{848}=50\frac{1}{4}$ 合。

75. 互易推本

问出度牒，差人背运，每三道，易盐一十三袋．盐二袋，易布八十四尺．布一十五尺，易绢三尺半．绢六尺，易银七两二钱．今趁到银九千一百七十二两八钱，欲知元关度牒道数几何？

答曰：度牒一百八十道．

术曰：以粟米互乘易法求之，列各数，以本色相对，如雁翅，以多一事者相乘为实，以少一事者相乘为法．除之。



【新释】 设度牒 a_1 道，易盐 b_2 袋，盐 a_2 袋易布 b_3 匹，布 a_3 匹易绢 b_4 匹，绢 a_4 匹易银 b_5 两．今趁到银 a_5 两，则元关度牒道数

$$b_1=\frac{a_1a_2a_3a_4a_5}{b_2b_3b_4b_5} \tag{α}$$

其草式，亦可以雁翅状得之：

$$\begin{array}{l} a_1-b_2 \\ \quad a_2-b_3 \\ \qquad a_3-b_4 \\ \qquad\quad a_4-b_5 \\ \qquad\qquad a_5 \end{array}$$

以 a_i 相乘为实，以 b_k 相乘为法，除之，即得(α)式。

【原草】 草曰：先以度牒 3 道，乘盐 2 袋，得 6，以乘布 15，得 90，又乘绢 6 尺，得 540，乃乘银 91728 钱，得 49533120 钱，为实．次以盐 13 袋，乘布 84，得 1092，以乘绢 3 尺 5 分，得 3822，乃乘银 72 钱，得 275184 钱，为法．除实，得 180 道，为元关度牒．

【新释】 已知：$a_1=3$ 道，$b_2=13$ 袋，$a_2=2$ 袋，$b_3=84$ 匹，$a_3=15$ 匹，$b_4=3.5$ 匹，$a_4=6$ 匹，$b_5=72$ 钱，$a_5=91728$ 钱．代入(α)式，得元关度牒道数：

$$b_1=\frac{3\times2\times15\times6\times91728}{13\times84\times3.5\times72}=\frac{49533120}{275184}=180\text{ 道}.$$

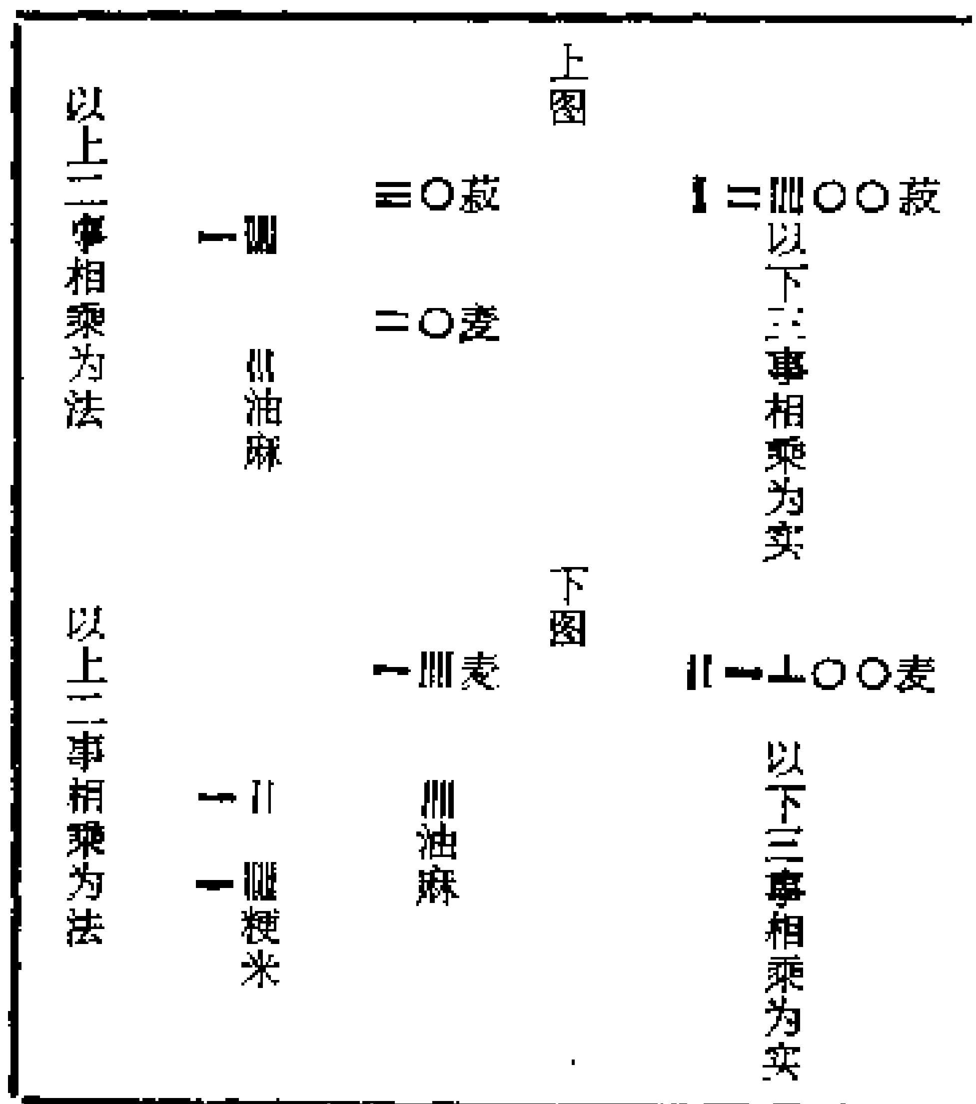
76. 菽粟互易

问. 菽三升，易小麦二升，小麦一升五合，易油麻八合，油麻一升二合，易粳米一升八合. 今将菽十四石四斗，欲易油麻，又将小麦二十一石六斗，欲易粳米，几何?

答曰：油麻，五石一斗二升.

粳米，一十七石二斗八升.

术曰：以粟米换易求之. 置元易率，本色对列，如雁翅。以多一事者相乘为实，以少一事者相乘为法，除之，各得或问数. 不干其率者不置。



【新释】 设菽 a_1 升，易小麦 b_2 升，小麦 a_2 升，易油麻 b_3 合，油麻 a_3 合，易粳米 b_4 合，今出菽 b_1 升，欲易油麻，出麦 b' 升，欲易粳米，则可得

$$\text{油麻}=\frac{b_1 b_2 b_3}{a_1 a_2} \qquad (\alpha)$$

$$粳米=\frac{b'b_2b_3}{a_2a_3} \qquad (\beta)$$

【原草】 草曰：置四率六数，列六位率，如雁翅．皆化为合，先将菽 14 石 4 斗，化作 14400 合．乃对前二句率数四位，如雁翅至欲易油麻止，共五事，为上图．

次将小麦 21 石 6 斗，化作 21600 合，乃对后两句率四位，如雁翅．至欲易粳米止，共五事，为下图．

其上图，以菽 14400 合，乘麦 20，得 288000，又乘油麻 8 合，得 2304000 合，为油麻实．次以菽 30 合，乘麦 15，得 450 合，为法．除之，得 5120 合，展为 5 石 1 斗 2 升，为油麻．

其下图，以小麦 21600 合，乘油麻 8 合，得 172800 合，又乘粳米 18 合，得 3110400 合，为粳米实．以小麦 15 合，乘油麻 12 合，得 180 合，为法．除之，得 17280，展作 17 石己斗 8 升．为粳米．

【新释】 已知：$a_1=3$ 升，$b_2=2$ 升，$a_2=1.5$ 升，$b_3=8$ 合，$a_3=12$ 合，$b_4=18$ 合，$b_1=1440$ 升，$b'=2160$ 升．代入(α)式，得

$$油麻=\frac{1440\times2\times8}{3\times1.5}=\frac{230400}{4.5}=5120\text{ 合}=5\text{ 石 }1\text{ 斗 }2\text{ 升}.$$

由(β)式，得

$$粳米=\frac{2160\times8\times18}{1.5\times12}=\frac{311040}{18}=17280\text{ 合}=17\text{ 石 }2\text{ 斗 }8\text{ 升}.$$

第十八卷 凡 五 问

77．推 计 互 易

问库率，糯谷七石，出糯米三石．糯米一斗，易小麦一斗七升，小麦五升，踏曲二斤四两．曲一十一斤，酝糯米一斗三升．今有糯谷一千七百五十九石三斗八升，欲出谷做米易麦踏曲还自酝全谷之米，须合适足，各合几何？

元图

谷　米　麦　曲

四因二斤四两，乃作九斤，得麦二斗。

以首位谷七，因米一斗三升，变为上四位，进乘。

谷，以米三石，因二十一斤曲。

曲　斤

米

变图

谷　米　麦　曲

下四位，退乘。

曲　谷

合图

四行相对，有者乘之。

率图

出率　米率　麦率　曲率　余率

法率

问数　升

定升 出实 米实 麦实 曲实 余实 法

五实，皆如法而一．

定升 出榖 得米 易麦 踏曲 余榖 粝米 法 实

答数图：

答曰：共谷一千七百五十九石三斗八升．

出谷，九百二十四石．

得米，三百九十六石．

易麦，六百七十三石二斗．

踏曲，三万二百九十四斤．

余谷，八百三十五石三斗八升．

粝米，三百五十八石二升(原"升"误为"斗")．

术曰：以粟米换易求之．置诸率，随本色对列，如雁翅．有分者通之，异类者变之．以上位者进乘之，以下位者退乘之，得合数。有对者相乘之，无对者直命之，为诸率．并上下无对者，为法率。诸率可约者，约之．以今有物遍乘诸率，不乘法率．各为实．诸实并如法而一，各得．其已变者复互易乘除之，即得所求．

【新释】 设糯谷 a_1 石，出糯米 b_1 斗；糯米 a_2 斗，易小麦 b_2

升；小麦 a_3 升，踏曲 b_3 斤；曲 a_4 斤，酝糯米 b_4' 斗．今有糯谷 A

$$
\begin{array}{l}
a_1 - b_1 \\
\quad a_2 - b_2 \\
\qquad a_3 - b_3 \\
\qquad\quad a_4 - b_4
\end{array}
$$

以 a_i 进乘，b_i 退乘，仍置如雁翅：

$$
\begin{array}{l}
a_1a_2a_3a_4 - b_1 \\
\quad a_2a_3a_4 - b_1b_2 \\
\qquad a_3a_4 - b_1b_2b_3 \\
\qquad\quad a_4 - b_1b_2b_3b_4
\end{array}
$$

以首尾两项相加为共法，上下有对者相乘之为率，无对者迳为率，以各率乘今有物 A 为各实．实如法，即得(β)至(ζ)各式．这便是秦氏给出的巧妙方法，对于连锁比例和配分比例的混合命题来说，是很方便的．

【原草】 草曰：置糯谷 7，出米 3，于右行上副两位．次置糯米 1 斗，麦 1 斗 7 升，于副行副中两位．次置小麦 5 升，踏曲 2 斤 4 两，于次行中次两位．次置曲 11 斤，酝米 1 斗 3 升，于左行次下两位．随本色对列如雁翅讫．乃验次行 2 斤 4 两，是 4 分斤之 1，以母 4 通次行两位，以子 1 内次行次位，其中位得 20，次位得 9．又验左行下位，是糯米，是异类于糯谷，合变为糯谷，乃以问中首句率谷 7 米 3 变之，以 7 因米 1 斗 3 升，得 9 斗 1 升于左下，为谷．却以米 3 因曲 11 斤，为 33 斤曲于左次（“次”原为“行”），得变数图．以左行 33，乘次行 20，得 660；次以得 660，乘副行 10，得 6600；次以 6600，乘右上 7，得 46200，各于元位．却以右行副位 3，因副行 1 斗 7 升，得 5 斗 1 升，又以 5 斗 1 升，乘次行 9，得 459，又以 459，乘左下 91，得 41769，列为合图数．乃验合图四行，其副中次三位有对者，以对相乘，合之．其右上左下无对者，直命之，皆为率，列

右行．上得46200，为出糯谷率．副位得19800，为得糯米率．中得33660，为易得麦率．次得15147，为踏到曲率．下得41769，为余下糯谷率．并上下二率，共得87969，为法率．今六率共求等，得1，约之，只得元率，为率图．始用今有糯谷1759石3斗8升，皆化为升．遍乘五率，不乘法率．得8128335600升，为出谷实．得2483572400升，为糯米实．得5922073080升，为易麦实．得2664932886，为踏曲实．得7348754322升，为余谷实．其五实，皆如法87969而一，得924石，为出谷．得396石，为做到糯米．得673石2斗，为易到小麦．得30294斤，为踏到曲．得835石3斗8升，为余下谷．今将余下谷，变为米．乃以米率3因余谷835石3斗8升，得2506石1斗4升，为实．以糯谷率7为法，除之，得358石2升，为酝米．

【新释】　已知：$A=1759.38$石，$a_1=7$石．$b_1=30$斗，$a_2=1$斗．$b_2=17$升，$a_3=5$升，$b_3=2\frac{1}{4}$斤，$a_4=11$斤，$b_4'=1.3$斗，$b_4=\frac{7\times1.3}{30}$石．今$b_3$，$b_4$为分数，可略变$a_3$，$b_3$；$a_4$，$b_4'$的比值的数字，使分数消去．兹变$a_3=20$升，$b_3=9$斤，$a_4=33$斤，$b_4'=3.9$斗，于是$b_4=\frac{7\times3.9}{30}=0.91$石．代入$(\beta)$至$(\eta)$各式，得

$$A_1=\frac{7\times1\times20\times33\times1759.38}{7\times1\times20\times33+30\times17\times9\times0.91}=\frac{8128335.6}{4620+4176.9}$$

$$=\frac{81283356}{87969}=924\text{石},$$

$$A_2=\frac{30\times924}{7}=3960\text{斗}=396\text{石},$$

$$A_3=\frac{17\times3960}{1}=67320\text{升}=673\text{石}2\text{斗},$$

$$A_4=\frac{9\times67320}{20}=30294\text{斤},$$

$$A_5=\frac{0.91\times 30294}{33}=835.38\text{石}=835\text{石}3\text{斗}8\text{升},$$

$$A_6=\frac{30\times 835.38}{7}=3580.2\text{斗}=358\text{石}2\text{升}.$$

78. 炼金计值

问库有三色金，共五千两．内八分金，一千二百五十两，两价四百贯文．七分五厘金，一千六百两，两价三百七十五贯文．八分五厘金，二千一百五十两，两价四百二十五贯文．并欲炼为足色，每两工食药炭钱，三贯文，耗金九百七十二两五钱．欲知色分及两价各几何？

答曰：色一十分．

两价，五百三贯七百二十四文五百三十七分文之二百一十二．

术曰：以方田及粟米求之．置共数，以耗减之，余为法．以三色分数各乘两数，并之，为色分实．以三色价数，各乘两数为寄．以工药价乘共金，并价寄，共为价实．二实皆如法而一，即各得．

【新释】 设共金 A 两，p_1 成金 a_1 两，每两 b_1 贯文；p_2 成金 a_2 两，每两 b_2 贯文；p_3 成金 a_3 两，每两 b_3 贯文．又设每两工食药炭钱 c 贯文，耗金 A' 两．则成色为

$$B=\frac{p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3}{A-A'} \qquad (\alpha)$$

而成色为 B 的两价为

$$M=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+cA}{A-A'} \qquad (\beta)$$

【原草】 草曰：置共金 5000 两，减耗 972 两 5 钱，外余 4027 两 5 钱，为法．次置 1250 两，乘 8 分，得 1 万分于上．置 1600 两，以 7 分 5 厘乘之，得 12000 分，加上．置 2150 两，乘 8 分 5 厘，得

18275分，又加上．共得40275分，为分实．次置1250两，乘400贯，得50万贯，为寄．次置1600两，乘价375贯，得60万贯，加寄．次置2150两，乘价425贯，得913750贯，又加寄．次置共金5000两，乘工药钱3贯，得15000贯，又加寄．共得2028750除贯，为价实．二实并如法4027两5钱而一，其色，得10分．其价，每两得503贯724文，不尽1贯590，与法求等，得75，俱约之，为573分文之212．

共金	上分	上分
上　5000两	10000	10000
耗	八分金	得
中　972.5两	1250两	12000分
法		七分半金
下　4027.5两		1600两
	8分	7.5分
中减上，得下法	中乘下，得上	次乘下，得副，以并上

上分 𝍡𝍪○○○	色分实 𝍣○𝍡𝍮𝍣分
得 𝍠𝍮𝍡𝍮𝍣分	寄 𝍣○○○○○○○○文
八分半金 𝍪𝍠○̇○两	八分金 𝍩𝍡○̇○两
○○̇分	𝍬○○○○○文八分价
次乘下，得副，以并上	次乘下，得副。

寄 𝍣○○○○○○○○文	寄 𝍩𝍠○○○○○○○○文
得 𝍥○○○○○○○○文	得 㐅𝍩𝍢𝍮𝍫○○○○文
七分半金 𝍩𝍥○○	八分半金 𝍪𝍠○̇○
𝍫𝍦○̇○○○文七分半价	㐅𝍡○̇○○○文八分半价
次乘下，得副，并上。	次乘下，得副，并上。

其色实余尽，得 10 分，为金色．其价除得 503 贯 724 文，为十分金每两价，不尽 1 贯 590 文，与法求等，得 7.5，俱以约之，为 537 分文之 212．

【新释】　已知：$p_1=8$ 分，$p_2=7.5$ 分，$p_3=8.5$ 分；$a_1=1250$ 两，$a_2=1600$ 两，$a_3=2150$ 两；$b_1=400$ 贯文，$b_2=375$ 贯文，$b_3=425$ 贯文；$A=5000$ 两，$A'=972.5$ 两，$C=3$ 贯文．代入(α)式，得所求成色

$$B=\frac{8\times1250+7.5\times1600+8.5\times2150}{5000-972.5}$$

$$=\frac{10000+12000+18275}{4027.5}$$

$$=\frac{40275}{4027.5}=10\text{ 分}.$$

由(β)式，得纯金（即十分金）的每两价格：

$$M=\frac{1250\times400+1600\times375+2150\times425+5000\times3}{4027.5}$$

$$=\frac{500000+600000+913750+15000}{4027.5}$$

$$=\frac{2028750}{4027.5}$$

$$=503\frac{29175}{40275}=503\text{贯}724\frac{212}{537}\text{文}.$$

79. 推求本息

问三库息例，万贯以上，一厘，千贯以上，二厘五毫．百贯以上，三厘．甲库本四十九万三千八百贯，乙库本三十七万三百贯，丙库本二十四万六千八百贯．今三库共纳到息钱二万五千六百四十四贯二百文，其典率，甲反锥差，乙方锥差，丙蒺藜差．欲知元典三例本息各几何？

答曰：甲库共纳息九千五十三贯文，

一厘息，二千四百六十九贯文，

二厘半息，四千一百一十五贯文，

三厘息，二千四百六十九贯文．

乙库共纳息一万五十一贯文，

一厘息，二百六十四贯五百文，

二厘半息，二千六百四十五贯文，

三厘息，七千一百四十一贯五百文．

丙库共纳息六千五百四十贯二百文，

一厘息，二百四十六贯八百文，

二厘半息，一千八百五十一贯文，

三厘息，四千四百四十二贯四百文．

术曰：置诸库诸色之差，照厘率，为三行．纵并之为约率，横命之为乘率．先以约率各约自库之本，各得．以遍乘未并乘率，然后各以厘率横乘之，次以纵并之，为各库共息．

甲库反璀差 Ⅲ乘率 Ⅱ乘率 Ⅰ乘率 并此行，得六。

乙库方锥差 丨 ㄨ 又 并此行得一十四。

丙库菉蘩差 上丨 中|||| 下丅 并此行，得一十。

甲约率丅 乙约率一|||| 丙约率一〇

甲得文 ≐||☰〇〇〇〇〇 甲本文 ||||ㄨ|||≐〇〇〇〇〇 甲约丄 下除中，得上。

乙得文 =丅ㄨ〇〇〇〇〇 乙本文 |||丄〇☰〇〇〇〇〇 乙约一|||| 下除中，得上。

丙得文 =||||丄ㄒ〇〇〇〇 丙本文 ||☰丅≐〇〇〇〇〇 丙约一〇 下除中，得上。

甲乘率上 [rod numerals]
中 [rod numerals]
下 [rod numerals]
甲得文〇〇〇〇〇 [rod numerals]
遍乘三率

甲上率〇〇〇〇〇 [rod numerals] 文
中率〇〇〇〇〇 [rod numerals] 文
下率〇〇〇〇〇 [rod numerals] 文
〇

乙率 [rod numerals]
[rod numerals]
[rod numerals]
乙得文〇〇〇〇 [rod numerals]
遍乘三率

乙上率〇〇〇〇 [rod numerals]
中率〇〇〇〇〇 [rod numerals]
下率〇〇〇〇 [rod numerals] 文
〇

丙率 Ⅰ
Ⅲ
ㄒ
三率遍乘 =Ⅲ⊥Ⅲ○○○○

丙上率 上文 ⅡⅢ⊥Ⅲ○○○○○
中率 中文 ≐Ⅲ○Ⅲ○○○○
下率 下文 Ⅰ☰Ⅲ○Ⅲ○○○○
○

甲上率 Ⅱ×ㄒ×○○○○○
中 Ⅰ⊥×⊥○○○○○
下文 ≐Ⅱ☰○○○○○
右行

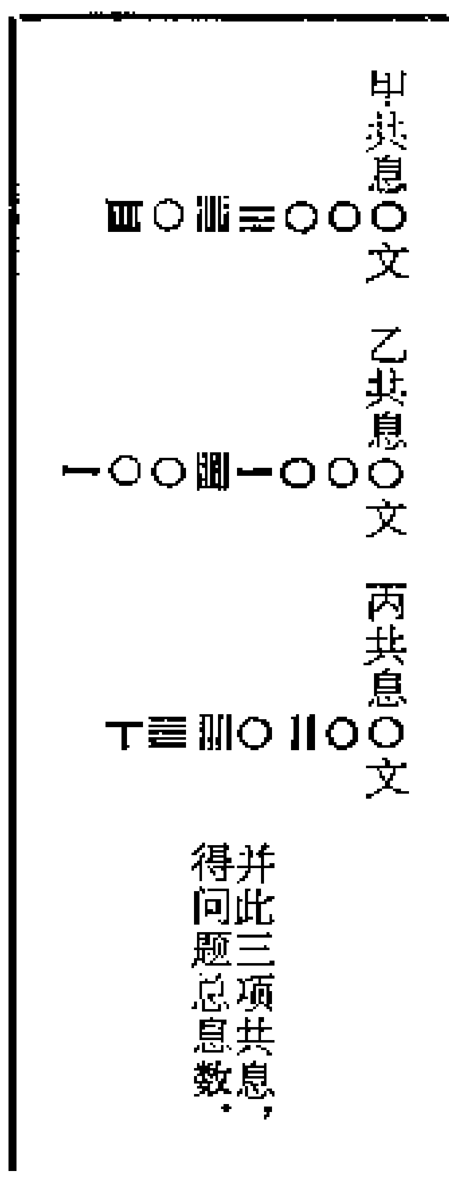
两行对乘

Ⅰ 厘
Ⅱ☰ 厘
☰ 厘
左行

甲上息文 Ⅱ☰Ⅱ×○○○
中息文 ×—Ⅰ○○○○
下息文 Ⅱ×ㄒ×○○○
甲共息文 ×○○☰○○○

乙上率 =丅〤〇〇〇〇〇	丨厘	乙上息 =丅〤〇〇〇
中率 丨〇〇≐〇〇〇〇〇	〢厘	〢⊥〤〇〇〇〇
下率 〢≡〦〇〇〇〇〇〇文	〣厘	〦一〤一〇〇〇
两行对乘		乙共息 一〇〇〇一〇〇〇文

丙上率 ≐〤⊥〦〇〇〇〇	丨厘	丙上息 =〣⊥〦〇〇
中率 ≐〤〇〤〇〇〇〇	〢厘	中息 丨≐〇一〇〇〇
下率 丨〤〦〦〇〇〇〇〇文	〣厘	下息 〤〤〤=〤〇〇
两行对乘		丙共息 丄〇〤〇〢〇〇文



【新释】 设诸库息例，万贯以上，利率为 p_1，千贯以上，利率为 p_2，百贯以上，利率为 p_3；甲库本金为 A，其利率为 p_1 的本金为 A_1，利率为 p_2 的本金为 A_2，利率为 p_3 的本金为 A_3；乙库本金为 B，利率为 p_1 的本金为 C_1，利率为 p_2 的本金为 B_2，利率为 p_3 的本金为 B_3；丙库本金为 C，利率为 p_1 的本金为 C_1，利率为 p_2 的本金为 C_2，利率为 p_3 的本金为 C_3；又设甲库共纳息为 R，乙库共纳息为 S，丙库共纳息为 T．则甲库各种利率的息金为

$$R_i=\frac{AA_ip_i}{A_1+A_2+A_3} \qquad (\alpha)$$

$$R=\sum_{k=1}^{3}R_k \qquad (\beta)$$

乙库各种利率的息金为

$$S_i=\frac{BB_ip_i}{B_1+B_2+B_3} \qquad (\gamma)$$

$$S=\sum_{k=1}^{3}S_k \qquad (\delta)$$

丙库各种利率的息金为

$$T_i=\frac{CC_ip_i}{C_1+C_2+C_3} \qquad (\varepsilon)$$

$$T=\sum_{k=1}^{3}T_k \qquad (\zeta)$$

而三库

$$\text{共纳息}=R+S+T \qquad (\eta)$$

【原草】 草曰：置甲库反锥差，自下置一二三于右行．次置乙库方锥差，自上置一四九于中行．次置丙库蒺藜差，自上置一三六于左行．各为三库上中下三等乘率．乃纵并甲差三二一，得9，为甲约率．纵并乙差一四九，得14，为乙约率．纵并丙差一三六，得10，为丙约率．直命九位数，各为上中下乘率．乃先以约率，各约自库之本，乃以甲约率6，约甲本493800贯，得82300贯，为甲得．次以乙约率14，约乙本370300贯，得26450贯，为乙得．次以丙约率10，约丙本216800贯，得24680贯，为丙得．以各得乘未并乘率，其甲所得82300贯，乘反锥乘率三二一，得246900贯，为上率．得164600贯，为中率．得82300贯，为下率．其乙所得26450贯，以乘方锥差一四九，得26450贯，为上率．得105800贯，为中率．得238050贯，为下率．其丙所得24680贯，以乘蒺藜差一三六，得24680贯，为上率．得74040贯，为中率．得148080贯，为下率．然后各以息厘数乘各库三率(原"率"误为"乘")．此是变文为库．其甲，以1厘乘上率246900贯，得2469贯，为上息．以2厘5毫乘中率164600贯，得4115贯，为中息．以3厘乘下率82300贯，得2469贯，为下息．并上中下三息，得9053贯文，为甲库共息．其乙库，以1厘乘上率26450贯，得264贯500文，为上息．以2厘5毫乘中率105800贯，得2645贯，为中息．以3厘乘下率238050贯，得7141贯500，为下息．并上中下三息，得10051

贯文，为乙库共息．其丙库，以1厘乘上率24680贯，得246贯800，为上息．以2厘5毫乘中率74040贯，得1851贯，为中息．以3厘乘下率148080贯，得4442贯400，为下息．并上中下三息，得6540贯200文，为丙库共息．都并三库共息，得25644贯200文，为总息．

【新释】 已知：$A=493800$ 贯文，$p_1=0.01$，$p_2=0.025$，$p_3=0.03$，$A_1:A_2:A_3=3:2:1$．代入(α)，(β)二式，得

$$R_1=\frac{493800\times A_1\times 0.01}{A_1+A_2+A_3}=\frac{493800\times 3\times 0.01}{3+2+1}$$

$$=82300\times 3\times 0.01=2469 \text{ 贯文},$$

$$R_2=82300\times 2\times 0.025=4115 \text{ 贯文},$$

$$R_3=82300\times 1\times 0.03=2469 \text{ 贯文},$$

$$R=2469+4115+2469=9053 \text{ 贯文}.$$

次知：$B=370300$ 贯文，$B_1:B_2:B_3=1:4:9$，由(γ)，(δ)二式，得

$$S_1=\frac{370300\times B_1\times 0.01}{B_1+B_2+B_3}=\frac{370300\times 1\times 0.01}{1+4+9}$$

$$=26450\times 1\times 0.01=264 \text{ 贯 } 500 \text{ 文},$$

$$S_2=26450\times 4\times 0.025=2645 \text{ 贯文},$$

$$S_3=26450\times 9\times 0.03=7141 \text{ 贯 } 500 \text{ 文},$$

$$S=264500 \text{ 文}+2645000 \text{ 文}+7141500 \text{ 文}$$

$$=10051 \text{ 贯文}.$$

又知：$C=246800$ 贯文，$C_1:C_2:C_3=1:3:6$，由(ε)，(ζ)二式，得

$$T_1=\frac{246800\times C_1\times 0.01}{C_1+C_2+C_3}=\frac{246800\times 1\times 0.01}{1+3+6}$$

$$=24680\times 1\times 0.01=246 \text{ 贯 } 800 \text{ 文},$$

$$T_2=24680\times 3\times 0.025$$

$$=1851 \text{ 贯文},$$

$$T_3 = 24680 \times 6 \times 0.03$$

$$= 4442 \text{贯} 400 \text{文},$$

$$T = 246800 \text{文} + 1851000 \text{文} + 4442400 \text{文}$$

$$= 6540 \text{贯} 200 \text{文}.$$

由(γ)式，得

$$\text{共纳息} = 9053000 \text{文} + 10051000 \text{文} + 6540200 \text{文}$$

$$= 25644 \text{贯} 200 \text{文}.$$

80. 推求典本

问典库今年二月二十九日，有人取解一号主家，听得当事共计算本息一百六十贯八百三十二文．称系前岁头腊月半解去，月息利二分二厘．欲知元本几何?

答曰：本，一百二十贯文．

术曰：以粟米求之．置积日，乘息分数，增三百，为法．以三百乘共钱，为实．实如法而一，得本．

【新释】 设积日为 d，月息为 p，本利和为 s，则本金

$$A = \frac{S}{1 + \frac{d}{30} \cdot \frac{p}{10}} = \frac{300S}{300 + dp} \qquad (\alpha)$$

【注】 按惯例，若谓月息二分，实际是二厘，即所谓"小二分，"若实际为二分时，一般就叫做"大二分"．案语"此问所云二分二厘，与今时略同．谓出钱一贯，每月纳息二十二文也．云增三百者，以十文为率也。…"似与秦氏原意不符．

【原草】 草曰：置前年头腊月半，系 45 日，并去年 360，又如今年 59 日，共得 464，为积日．乘息 2 分 2 厘，得 102 文 8 厘，增 300 文，得 402 文 8 厘，为法．以 300 文乘共钱 160 贯 832 文，得 48249 贯 600 文，为实．实如法而一，得 120 贯文，为元本．

前年头𝍩𝍣日 腊月半	积𝍣𝍮𝍤日	增𝍢〇〇数
后腊 月全𝍫〇	〇𝍪𝍡分	本息𝍩𝍥〇𝍢𝍫𝍡文
[illegible]		

法一退	法不进，乃命上商除实。	商约十贯
商 100000 文	商 100000 文	商 00000 文
余实 8041600 文	实 48249600 文	实 48249600 文
法 40208 文	法 40208 文	法 40208 文

所得一百二十贯，为元本，合问。	乃命续商，除实适尽。
得元本 120000 文	续商 120000 文
0000000	8041600
法 40208	法 40208 文

【新释】 已知：$d=45+360+59=464$ 日，$p=0.22$，$S=160832$ 文．代入(α)式，得本金

$$A=\frac{300\times160832}{300+464\times0.22}=\frac{48249600}{300+102.08}=\frac{48249600}{402.08}$$

$$=120000\text{ 文}=120\text{ 贯文}.$$

81．僦直推原

问房廊数内一户，日纳一百五十六文八分足，为准指挥未曾经

减者减三分，已曾经减三分者减二分，已曾经减二分者更减二分。今本户，累经减者，欲知元额房钱几何？

答曰：元额三百五十文。

术曰：以衰分求之。列一十分两行各三位，列减分对减右行，以余者相乘，为法。以左行元列相乘，复乘见纳钱(本句原为"得纳钱。")，为实。实如法而一，得元额钱。

减三分 二分 二分 以减分损右行，
一〇分 一〇分 一〇分 右行
一〇分 一〇分 一〇分 左行
右行 右行相乘，为法，
左行 左行相乘，为因率

得元额 文
乘率
见纳文
以因率乘见纳，为实
实 文
法

【新释】 设第一次减租为 p_1 分，第二次减租为 p_2 分，第三次

减租为 p_3 分. 今经累减后日纳房钱为 A', 则元额房钱

$$A=\frac{A'}{\left(1-\frac{p_1}{10}\right)\left(1-\frac{p_2}{10}\right)\left(1-\frac{p_3}{10}\right)}$$

$$=\frac{1000A'}{(10-p_1)(10-p_2)(10-p_3)} \qquad (\alpha)$$

【原草】 草曰: 列 10 分三位于左行, 又列 10 分三位于右行, 其右上, 减去初减 3 分, 右中减去次减 2 分, 右下减去更减 2 分, 右行余七八八, 以相乘, 得 448, 为法. 乃以左行三位 10 分相乘, 得 1000, 为乘率. 以乘见日纳钱 156 文 8 分, 得 156 贯 800 文, 为实. 实如法而一, 得 350 文, 为本户元额房钱.

【新释】 已知: $p_1=3$, $p_2=2$, $p_3=2$, $A'=156.8$ 文, 代入(α)式, 得元额房钱:

$$A=\frac{1000\times156.8}{(10-3)(10-2)(10-2)}=\frac{156800}{7\times8\times8}=\frac{156800}{448}=350\text{ 文}$$

附　录

一、关于秦九韶与《数书九章》研究的近30年之进展

秦九韶的《数书九章》(原名《数术大略》,1247)完成后,流传不广,早期研究者也不多,直到清代乾隆年间才引起人们的注意. 从此才真正开始对秦九韶和《数书九章》进行研究. 我在《关于秦九韶与<数书九章>的研究史》中,把从乾隆后期到本世纪70年的研究分4个时期予以讨论,其中第4个时期是50年代到70年代,有一部分与本文在时间上重合. 为了配合《数书九章新释》一书的研究方便起见,我们仍从60年代开始,但是增加了一些新的资料,并且在写法上也有改变.

在从60年代初到1990年这30年中,国内外学者对秦九韶和《数书九章》的研究相当活跃. 特别是在80年代达到了空前的程度. 如果我们仔细了解一下就发现在近30年中形成了三次研究高潮,60年代、70年代和80年代各出现一次,而且是一次胜过一次. 需要指出的是第二次高潮出现在国外,并不在中国.

第一次高潮以出版《宋元数学史论文集》(1966)为标志,其中有钱宝琮一篇专门论文《秦九韶<数书九章>》研究,可以说是全面讨论了秦九韶与《数书九章》的主要问题.该文分为六部分,第一部分讲秦九韶的生平事迹及其《数书九章》的一般情况;第六部分是讲述《数书九章》所反映的南宋社会经济状况,中间的四部分讲述秦九韶在数学方面的主要成就(一次同余式问题,高次方程问题,联

立一次方程问题，勾股测量问题）.钱先生在文中引用了《南宋馆阁续录》等新史料，从而对秦九韶的父亲秦季槱及秦氏少年时代有了某些了解. 钱先生又重申他在1963年提出的秦九韶生卒年月问题，根据"秦九韶，……年十八在乡里为义兵首"和景定三年(1262)"诏吴潜党人永不录用"等记载推定为死年当在景定二年，以生于嘉定二年推之，"卒年为六十岁(1202—1261)". 这个看法对后来影响很大.

过去，我认为钱先生是首次重点讨论《数书九章》中的联立一次方程问题和勾股测量问题，其实王守义先生早已把联立一次方程问题做为秦氏的主要成就之一加以讨论了，但王先生并未重点讨论勾股测量问题. 至于《数书九章》所反映的南宋社会经济问题，则是钱先生首次明确讨论的.

钱先生在讨论宋元道学不能阻挡数学发展时，曾把秦九韶的数学成就做为第一个例子. 对秦九韶也给出了全面的评价，其结论是"有才有学的人未必有德，我们读《数书九章》不能不表扬秦九韶在数学方面的贡献，但是他的为人，也应符合当时的历史实际".

在此期间，对于某些个别问题也有探讨. 例如，严敦杰先生在讨论宋金元历法中的数学知识时，多次引用或提到《数书九章》数学在历法中的应用. 白尚恕先生在一篇文章中讨论《数书九章》中测望九题的造术问题，并对九题逐一加以解释，目的是"借以探讨秦氏立术之源". 李迪在一篇文章中比较了"海伦公式"和"三斜求积"问题的解法，并指出"三斜"的数据13、14、15与"海伦公式"等的数据完全相同，"这其中是否有交流关系问题"，迄无答案. 何丙郁先生则把秦九韶与较晚的卡丹予以比较.

国外在七十年代，关于秦九韶与《数书九章》的研究进入了一个新的高潮时期. 70年代初，美国出版了一套多卷《科学家传记辞典》，后来(1981)又把它缩编为《简明科学家传记辞典》，都收入了秦韶九的传记。该传记由何丙郁先生执笔，前者16开本英文8

页，详细介绍了秦九韶的生平事迹和成就，这是国际上第一次给秦九韶立传.

1973年做为席文(N. Sivin)主编的《东亚科学丛书》第一集的《十三世纪中国数学》，其副标题是《秦九韶的〈数书九章〉》，实际上是世界上第一部关于秦九韶和《数书九章》专著，作者是比利时东方学系教授李倍始(U. Libbrecht). 这部书分为6卷，25章(包括附录2章)，共586页，书末的词汇表、参考文献和索引合计81页. 全书目录如下：

I. 秦九韶和他的《数书九章》

1. 中国数学的普遍特征. 宋元数学
2. 宋元数学家和数学方法
3. 秦九韶传
4. 《数书九章》：历史和研究
5. 《数书九章》的大概结构

II. 《数书九章》中的数学：数目字和专门术语

6. 记数法与专门术语

III. 初等数学方法

7. 算术
8. 几何
9. "三角"

IV. 代数学

10. 线性方程组
11. 行列式
12. 级数与数列
13. 高次方程数值解

V. 中国剩余定理：专论

14. 中国以外的不定分析：一般历史纵览
15. 中国不定分析史

16．中国十九世纪对大衍术的研究

17．秦九韶的一般方法

18．大衍术与库塔卡(Kuttaka)

19．秦九韶的大衍术与编制历法

20．秦九韶大衍术的普遍解法

21．秦九韶的大衍术与现代数学

22．《数书九章》中的不定分析问题

VI. 社会与经济背景

23．《数书九章》和宋代中国的生活

从上述目录可以看出：其第五卷(V)"中国剩余定理"做为全书的专论，竟占了23章中的9章，篇幅超过200页，占了全书字数的将近1/3！显然是把大衍求一术放在了全书的中心位置.

书中把中国的不定分析与外国的不定分析进行详细对比，并列出了一个包括欧洲、中国、印度和伊斯兰世界的比较表。李倍始认为中国的大衍求一术与印度的库塔卡没有关系．他认为《数书九章》"标志着宋代晚期中国和那个时代两方面数学发展的最高点."

李倍始的著作在西方用英文出版以后，引起很大的反响，一些人相继发表评论，仅是何丙郁就发表了两篇评介文章，实际上成为国外传播中国十三世纪数书的主要著作之一.

苏联别列兹金娜(Э. И. Березкина)的工作也可勉强列入此期，她在1980年在莫斯科用俄文出版了一部《中国古代数学》的著作，其中大量提到了秦九韶和《数书九章》，并有6节集中予以讨论，它们是：

第3部分第2章11节：《算经十书》中的级数和秦九韶的贡献

第3部分第3章14节：一次同余式组，孙子和秦九韶

第4部分第1章12节：秦九韶著作中的线性方程组

第 4 部分第 2 章 15 节：秦九韶《数书九章》中关于二次方程的问题和解法

第 4 部分第 2 章 17 节：秦九韶、李冶和朱世杰对高次方程解法的贡献

第 5 部分第 4 章 15 节：秦九韶对“测望”的贡献

根据上列的情况，我们看出：别列兹金娜把秦九韶和《数书九章》做为她书的重点内容予以讨论．其中对于二次方程的讨论，别处极为少见．别列兹金娜分二次方程为缺项的和完全的两种类型，它们来自《数书九章》的第 4、5、6、7、8、15 和 16 七章，分别讨论了它们的解法。

自 80 年代初以来，对秦九韶和《数书九章》的研究引起人们更多的兴趣，因此研究更加深入，直到 1987 年形成了第三次高潮．其标志有二，第一是这年的 4 月北京师范大学出版社出版了吴文俊先生主编的《秦九韶与〈数书九章〉》一书，这是一部专题论文集，收论文 30 篇，书评 1 篇，末附“秦九韶与《数书九章》研究论文目录”29 条（只限国内）．第二是同年 5 月在北京师范大学召开了一次“秦九韶《数书九章》成书 740 周年纪念暨学术研讨国际会议”，有日本、中国、比利时和美国等国 55 名学者出席，收到有关论文 30 篇和两篇综合专题报告．会议的论文于会后陆续发表了一部分，还有一部分收入了《中国数学史论文集》（四），尚未出版发行．为增进了解我们把已发表的有关论文和个别著作的有关内容进行简要地介绍．

为了讨论的方便，我们将按内容分为若干问题加以叙述。

关于秦九韶生平事迹的研究．在这方面主要的有严敦杰、李迪、邵启昌和莫绍揆的工作，严敦杰先生的《秦九韶年谱初稿》引用了许多新史料，对于秦的籍贯，秦与当时社会、某些人物的关系等都提出了新看法．严先生认为秦凤路属于利州西路，秦季槱做太守的巴州属于利州东路，而秦九韶后来随父守郡之潼川即利州路

的梓潼县，普州安岳县属梓州路与利州西路相邻．李迪则认为秦九韶的先世在鲁郡，后来迁到秦凤间，然后南下普州，定居于安岳．秦九韶为了表示自己不忘祖籍而在所著《数术大略》上署"鲁郡秦九韶"．邵启昌有一篇《秦九韶籍贯考》说"鲁"可能是"普"之误，"鲁郡"乃是"普郡"，因而定秦九韶为普州人．

秦九韶的生卒问题．长期以来大都接受钱宝琮先生的观点，而李迪认为生年要比钱说晚七年左右，只有这样才更合乎情理．卒年也不在1261年，而是在这以后若干年．莫绍揆先生以与李迪不同的理由，也认晚生之说为是．

李迪从《宋会要辑稿》等书中找到了一些秦季槱的资料，季槱在失守巴州之后不久到了临安任工部郎中、秘书少监等职．他还提出秦九韶的"隐君子"老师可能是陈元靓．

关于《数书九章》的流传与版本的研究．李俨先生在《十三世纪中国数学》中首先进行了《数书九章》流传的研究，李迪则予以补充，并且把现传本特别是抄本做了一些探讨．宋代以来版本颇多，共有抄本约11部，刊本1种，石印本1种，铅印本2种，影印本1种，缩微胶卷约3卷．现传的本子分属于三大系统，即《永乐大典》本（《数学九章》十八卷）、《四库全书》本（《数学九章》九卷）和赵琦美抄本（《数书九章》十八卷），其中赵本系统影响最大，是所有现传印本的母本．

沈康身对宜稼堂本《数书九章》进行较全面的正误工作，对书中的16道题予以校勘，所校的不是个别错字，而主要是书本身所存在的问题．李兆华对卷15"方变锐阵"题的解法进行了探讨，指出解法不能成立及其原因，并作了更正．郭世荣则对卷14"计作清台"题，做了类似的研究．

关于《数书九章》内容的综合研究．这方面有吴文俊先生的《从〈数书九章〉看中国传统数学的构造性与机械化的特色》一文，从《数书九章》中选取"质数与等数"、"增乘开方法与正负开方法"

和"大衍求一术"三方面为例论述中国传统数学的构造性和机械化问题. 白尚恕和李兆华的一篇论文从"编写体例"、"社会反映"、"题目类型"、"术名关联"和"解题方法"等五个方面探讨了《数书九章》对《九章算术》的继承和发展问题. 罗见今以"揲法"为中心研究了《数书九章》与《周易》的关系. 日本的川原秀城也从揲法的角度研究了《数书九章》的有关内容. 周瀚光探讨了秦九韶的数道思想. 李迪则在钱宝琮、李倍始的基础上进一步从"政府买卖谷物与斗斛"、"利息与典当"、"各种租税问题"、"会子与度牒"、"贸易问题"和"生产与土木工程"等6个方面探讨了《数书九章》与南宋的社会经济问题.

关于造术问题的研究. 这种研究于60年代从白尚恕先生开始, 到80年代又有新的进展. 李培业则以吴文俊的古证原复三原则为依据, 研究了秦九韶关于测望造术的思想, 对测望九题逐一进行了讨论. 程金华有《秦九韶"三斜求积"造术之探讨》一文.

关于中外比较的研究. 这是一个稍微引人注意的问题, 我们见到的至少有5篇论文. 何丙郁先生在60年代文章的基础上, 把秦九韶与卡丹诺从高次方程这个侧面进行了有趣的比较. 劳汉生则把秦九韶与阿维森纳做了比较研究. 沈康身有3篇从数学内容进行比较研究的论文. 最早的一篇是《秦九韶的大衍总数术和关孝和的诸约术》, 讨论大衍求一术与诸约术的关系问题. 还有一篇《库塔卡与大衍求一术》, 对比了中印两国的同余式解法, 指出在不定分析发展史上有许多平行性. 他的第三篇论文《<丽罗瓦底>与<数书九章>》, 从"计息"、"加权平均"、"比例"、"假设法"、"二次方程"、"数列"、"勾股定理"、"三斜求积"、"体积"、"相似勾股形"和"不定分析"和"排列"等方面进行比较, 认为互有长短.

关于大衍求一术的研究. 大衍求一术是长期以来, 人们普遍关心的问题. 几十年来, 虽有不少有关文章发表, 但由于《数书九章》中叙述含糊不清, 研究者可以有不同的理解, 因

而到80年代形成了一个研究高潮. 据不完全统计约有论文20篇，又有不同的内容. 李继闵的一篇论文，从"实践之'源'"和"理想之'本'"联系起来探讨大衍求一术的历史渊源问题. 袁向东和李文林研究了"大衍总数术"的结构，把"问数"的四种类型(格)看做一些算法，并举例予以论述. 莫绍揆在他的«秦九韶大衍求一术的新研究»中，详细讨论了有关大衍求一术的各种问题，其中核心部分是大衍求一术是一个机械的过程，是一个算法，并用 Algol 60 语言写出，还认为«数书九章»中的"立天元一"就是天元术中的"天元一". 李继闵也以算法程序的观点对"演纪之法"与"大衍总数术"进行探讨，他首先按筹算的特点考虑这个问题，然后讨论了"演纪之法"与"大衍总数术"，并认为是不相同的两种数学原理. 对于"立天元一"一语的理解是"构造筹算图式的特殊技巧，它用于定位和规定计算的起点". 李迪也把大衍求一术看做一种程序，把秦氏的"立天元一"比做电子计算机的存贮器.

"大衍总数术"中的第一个重要步骤是求定数算法，引起许多人的兴趣，至少有李继闵，梅荣照、王渝生、王翼勋、李兆华、钱克仁、李文林与袁向东、莫绍揆等学者做过探讨. 所谓"定数"就是把诸问数转化为适合一定条件的一组模数. 条件中包括把诸问数转化为两两互素的数这一关键点，但因秦九韶表述不清和其他原因，致使研究者莫衷一是，特别是对"约奇弗约偶"等句中的"奇"、"偶"，至今有不同的理解. 由此可见关于"大衍总数术"的研究还没有结束.

关于其他内容的研究. 沈康身研究过«数书九章»中的天文问题和土木建筑学，在前部分中，他从"调日法"、"推算冬至发生时刻"、"推算圭表给定影长发生时刻"、"求行星速度"和"求上元积年". 李继闵、陈久金等也都做过研究，但后者基本没有涉及秦氏的工作. 查有梁则探讨了与"求行星速度"一样的问题，即秦氏的

"缀术推星"题．在土木建筑学的论文中分为"城池"、"高台"、"房屋"、"浮图阁"、"浮桥"、"开河建坝"、"圃田"、"筑基"、"建材"和"功

新发表的论文缺漏肯定较多，诚恳地希望海内外学者给予补充和订正.

1. 李　迪：'海伦公式'的历史，《数学通报》1932年7月号，第42－43页.
2. 何丙郁：秦九韶与卡丹，《南洋商报》特刊，1963年1月1日.
3. 程廷熙：秦九韶雨深雪厚例解的探讨，《数学通报》1963年1月号，第34—36页.
4. 钱宝琮：秦九韶《数书九章》研究，《宋元数学史论文集》，1966，科学出版社，第60—103页.
5. 严敦杰：宋金元历法中的数学知识，同上，第210—224页.
6. 钱宝琮：宋元时期数学与道学的关系，同上，第225—240页.
7. 白尚恕：秦九韶测望九问造术之探讨，同上，第290—303页.
8. Ho Peng-Yoke, Ch'in Chiu-shao. Thirteenth-Century Chinese Mathematician, Dictionary of Scientific Biography, vol. 3, 1971, American Council of Learned Societies, pp. 249－256.
9. U. Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao, Cambridge(Mass), 1973, London, MIT Press.
10. 李文林、袁向东：中国剩余定理，《中国古代科技成就》，1973，中国青年出版社，第110—121页.
11. 沈康身：更相减损术源流，《自然科学史研究》第1卷第3期(1982)，第193－207页；《〈九章算术〉与刘徽》(1982，北京师范大学出版社)，第210—227页.
12. 李文林、袁向东：中国古代不定分析若干问题探讨，《科技史文集》第8辑"数学史专辑"，1982，上海科学技术出版社，第106—122页.
13. 郭书春：学习《数书九章》札记二则，同上，第123—127页.

14. 洪万生：十三世纪数学摘要，《科学史通讯》(台湾)，第二期(1983)，第22页.

15. 川原秀城：きうつの易筮法，《中国思想史研究》第六号，1984，玄文社，第127—138页.

16. 何丙郁：中西数学家传奇——高次方程数学史与秦九韶和卡丹诺，《中华文史论丛》1985年第一辑，第239—267页.

17. 李倍始编著、白尚恕编释：不定分析发展简史，《数学史释文集续集》，1985，上海科学技术出版社：第133—168页.

18. 鲁又文：《数学九章》中的几何问题，《数学通报》，1986年6月号，第40—43页.

19. 白尚恕：《数书九章》'计浚河渠'题分析，《数学报通》，1986年6月号，第43，33页.

20. 沈康身：《数书九章》大衍类算题中的数论命题，《杭州大学学报》(自然科学版)，第13卷第4期(1986)，第421—434页.

21. 张素亮：秦九韶和《数书九章》，《中学数学杂志》1986年第4期，第39—40页.

22. 程金华：秦九韶'三斜求积'造术之探讨，《湖北师院学报》(自然科学版)，1987年第1期，第36—39页.

23. 沈康身：秦九韶の大衍总数术と孝和の诸约术，《数学史研究》通卷号(1986)

24. 吴文俊(主编)：秦九韶与<数书九章>1987，北京师范大学出版社.

25. 白尚恕、沈康身、李迪、李继闵：《数书九章》研究总论，载上书，第1—11页.

26. 严敦杰：秦九韶年谱初稿，同上，第12—24页.

27. 李 迪：秦九韶传略，同上，第25—42页.

28. 李 迪：《数书九章》流传考，同上，第43—58页.

29. 沈康身：宜稼堂《数书九章》正误，同上，第59—72页.

30．吴文俊：又《数书九章》看中国传统数学的构造性与机械化的特色，同上，第 73—88 页．
31．罗见今：“《数书九章》与《周易》，同上，第 89—102 页．
32．白尚恕、李兆华：《数书九章》对《九章算术》的继承和发展，同上，第 103—123 页．
33．李继闵：‘蓍卦发微’初探，同上，第 124—137 页．
34．李继闵：‘大衍求一术’溯源，同上，第 138—158 页．
35．李向东、李文林：《数书九章》中大衍类问题及大衍总数术，同上，第 159—179 页．
36．莫绍揆：秦九韶大衍求一术的新研究，同上，第 180—202 页．
37．李继闵：从‘演纪之法’与‘大衍总数术’看秦九韶在算法上的成就，同上，第 203—219 页．
38．李继闵：关于‘大衍总数术’中求定数算法的探讨，同上，第 202—234 页．
39．李继闵：中国古代不定分析的成就与特色，同上，第 235—252 页。又载入《香港大学中文系集刊》第一卷第二期，1987，第 249—263 页．
40．沈康身：库塔卡与大衍求一术，《秦九韶与<数书九章>》，第 253—268 页．
41．沈康身：《丽罗瓦底》与《数书九章》，同上，第 269—284 页．
42．白尚恕：大衍术与欧洲的不定分析，同上，第 299—313 页．
43．沈康身：《数书九章》中的天文问题，同上，第 314—326 页．
44．李继闵：秦九韶关于‘调日法’的记述，同上，第 327—337 页．
45．李培业：秦九韶测望造术思想之探讨，同上，第 354—372 页．
46．沈康身：秦九韶与土木建筑学，同上，第 373—397 页。
47．沈康身：增乘开方法原流，同上，第 398—427 页．
48．李兆华：秦九韶方变锐阵题解法改正，同上，第 428—432 页．
49．沈康身：《数书九章》第九章互易三题释，同上，第 433—440

页.

50. 沈康身:《数书九章》均货推本题分析,同上,第441—450页.

51. 李 迪:《数书九章》中的统计资料,同上,第451—453页.

52. 李 迪:《数书九章》与南宋社会经济,同上,第454—466页.

53. 白尚恕、沈康身:李倍始《十三世纪中国数学》述评,同上,第467—477页.

54. 李迪:秦九韶与《数书九章》研究论文目录,同上,第478—479页.

55. 蒋术亮、向忠叔:巴蜀古代数学源流,《大自然探索》1987年第2期,第181—185页.

56. 梅荣照:秦九韶是如何得出求定数方法的,《自然科学史研究》第6卷第4期(1987),第293—298页.

57. 王渝生:秦九韶求'定数'方法的成就和缺陷,同上,第299—307页.

58. 王翼勋:秦九韶、时曰醇、黄宗宪的求定数方法,同上,第308—313页.

59. 查有梁:论秦九韶的'缀术推星',《大自然探索》1987年第4期,第160—166页.

60. 李 迪:中国传统数学的程序性,《香港大学中文系集刊》第一卷第二期(1987),第219—232页.

61. 解延年:中国南宋大数学家秦九韶,《数学通报》1987年8月号,第44—49页.

62. 邵启昌:秦九韶籍贯考,《西南师范大学学报》(自然科学版),1988年第4期,第126—128页.

63. 董光璧:'大衍数'和'大衍术',《自然辩证法研究》1988年第3期,第46—48页.

64. 张秀琴:秦九韶评传,《山西大学学报》(自然科学版)1988年第2期,第16—20页.

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»（自然科学版）1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»（自然科学版）1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»（自然科学版）第 15 卷第 3 期（1988），第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»（自然科学版）1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»（自然科学版）1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期（1989），第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期（1990），第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»（自然科学版）第 6 卷第 1 期（1990），第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»（中文本）。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65．劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页．

66．孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页．

67．沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页．

68．李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页．

69．郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页．

70．沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页．

71．莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页．

72．周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页．

73．梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页．

74．王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页．

75．李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页．

76．钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对“计作清台”题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从‘大衍术’到‘大衍求一术’，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：‘调日法’源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 朔，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对“计作清台”题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从‘大衍术’到‘大衍求一术’，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：‘调日法’源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对“计作清台”题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从‘大衍术’到‘大衍求一术’，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：‘调日法’源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 朔，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»（自然科学版）1988 书第 2 朔，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»（自然科学版）1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»（自然科学版）第 15 卷第 3 期（1988），第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»（自然科学版）1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对“计作清台”题的探讨，«内蒙古师大学报»（自然科学版）1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期（1989），第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期（1990），第 28—37 页.

74. 王翼勋：从‘大衍术’到‘大衍求一术’，«苏州大学学报»（自然科学版）第 6 卷第 1 期（1990），第 16—18 页.

75. 李继闵：‘调日法’源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»（中文本）。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 朔，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 朔，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 朗，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对“计作清台”题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从‘大衍术’到‘大衍求一术’，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：‘调日法’源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对“计作清台”题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从‘大衍术’到‘大衍求一术’，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：‘调日法’源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页．
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页．
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页．
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页．
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页．
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页．
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页．
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页．
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页．
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页．
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页．
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65．劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页．

66．孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页．

67．沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页．

68．李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页．

69．郭世荣：对“计作清台”题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页．

70．沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页．

71．莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页．

72．周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页．

73．梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页．

74．王翼勋：从‘大衍术’到‘大衍求一术’，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页．

75．李继闵：‘调日法’源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页．

76．钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页．
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页．
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页．
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页．
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页．
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页．
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页．
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页．
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页．
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页．
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页．
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 朔，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 朔，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页。
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页。
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页。
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页。
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页。
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页。
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页。
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页。
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页。
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页。
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页。
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对“计作清台”题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.

74. 王翼勋：从‘大衍术’到‘大衍求一术’，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.

75. 李继闵：‘调日法’源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»（自然科学版）1988 书第 2 期，第 84—89 页.

66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»（自然科学版）1988 年第 2 期，第 20—25 页.

67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»（自然科学版）第 15 卷第 3 期（1988），第 270—282 页.

68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»（自然科学版）1988 年第 3 期，第 78—83 页.

69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»（自然科学版）1988 年第 4 期，第 51—58 页.

70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期（1989），第 52—56 页.

71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.

72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.

73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期（1990），第 28—37 页.

74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»（自然科学版）第 6 卷第 1 期（1990），第 16—18 页.

75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»（中文本）。1990，科学出版社，第 31—43 页.

76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李 迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——《数书九章》中的一次同余式理论，《北京师范学院学报》(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，《杭州大学学报》(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，《陕西师大学报》(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，《内蒙古师大学报》(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，《自然杂志》第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，《传统思想与科学技术》，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，《自然科学史研究》第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，《苏州大学学报》(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，《第三届国际中国科学史讨论会论文集》(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 期，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日

65. 劳汉生：秦九韶与 Avicenna 之比较，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 书第 2 朔，第 84—89 页.
66. 孔国平：大衍术——«数书九章»中的一次同余式理论，«北京师范学院学报»(自然科学版)1988 年第 2 期，第 20—25 页.
67. 沈康身：中国剩余定理的历史发展，«杭州大学学报»(自然科学版)第 15 卷第 3 期(1988)，第 270—282 页.
68. 李兆华：秦九韶求定数法探讨，«陕西师大学报»(自然科学版)1988 年第 3 期，第 78—83 页.
69. 郭世荣：对"计作清台"题的探讨，«内蒙古师大学报»(自然科学版)1988 年第 4 期，第 51—58 页.
70. 沈康身：秦九韶对数学的杰出贡献，«自然杂志»第 12 卷第 1 期(1989)，第 52—56 页.
71. 莫绍揆：关于秦九韶生平及其成就，同上，第 57—63 页.
72. 周瀚光：秦九韶数道思想，«传统思想与科学技术»，1989，学林出版社，第 111—122 页.
73. 梅荣照：宋元数学中的思想、方法和理论，«自然科学史研究»第 9 卷第 1 期(1990)，第 28—37 页.
74. 王翼勋：从'大衍术'到'大衍求一术'，«苏州大学学报»(自然科学版)第 6 卷第 1 期(1990)，第 16—18 页.
75. 李继闵：'调日法'源流考，«第三届国际中国科学史讨论会论文集»(中文本)。1990，科学出版社，第 31—43 页.
76. 钱克仁：秦九韶大衍求一术中的求定数问题，同上，第 52—56 页。

李　迪

1990 年 11 月 11 日